Jens Carstensen. Данска
Alija Muminagić, Данска

ФИБОНАЧИЕВИ БРОЕВИ И ПОЛИНОМИ СО ЦЕЛОБРОЈНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Во оваа статија ќе покажеме, како на еден едноставен начин, можеме да докажеме некои познати формули за Фибоначиевите броеви. Како што знаеме:

- Членовите на низата ненегативни цели броеви 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... ги нарекуваме Фибоначиеви броеви, а $n-$ от член на низата го означуваме со f_n.
- Низата Фибонечиеви броеви најчесто ја дефинираме со рекурентната (диференцната) равенка
$$f_0=0,\ f_1=1,\ f_n=f_{n-1}+f_{n-2},\ \text{за } n\geq 2. \qquad (1)$$
- Карактеристичната равенка за диференцната равенка (1) е
$$x^2=x+1, \qquad (2)$$
и нејзините решенија се $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, па затоа општиот член на низата Фибоначиеви броеви се задава со формулата
$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n],\ n\geq 0. \qquad (3)$$

Во натамошните разгледувања за решенијата на диференцната равенка (2) ќе ги користиме ознаките
$$x_1=\alpha,\ x_2=1-\alpha. \qquad (4)$$

Пред да преминеме на докажување на споменатите формули за Фибоначиевите броеви ќе го докажеме следново тврдење.

Тврдење 1. За секој природен број $n\geq 2$ точна е формулата
$$x^n=(x^2-x-1)(f_1x^{n-2}+f_2x^{n-3}+f_3x^{n-4}+...+f_{n-2}x+f_{n-1})+f_nx+f_{n-1}. \qquad (5)$$

Доказ. Со непосредна проверка се убедуваме дека формулата (5) е точна за $n=2$. Понатаму, ако ја искористиме рекурентната равенка (1), за $n\geq 3$ добиваме:
$$\begin{aligned}(x^2-x-1)&(f_1x^{n-2}+f_2x^{n-3}+f_3x^{n-4}+...+f_{n-2}x+f_{n-1})+f_nx+f_{n-1}=\\ &=f_1x^n+f_2x^{n-1}+f_3x^{n-2}+f_4x^{n-3}+...+f_{n-2}x^3+f_{n-1}x^2+f_nx+f_{n-1}\\ &\quad -f_1x^{n-1}-f_2x^{n-2}-f_3x^{n-3}-...-f_{n-3}x^3-f_{n-2}x^2-f_{n-1}x\\ &\quad\quad -f_1x^{n-2}-f_2x^{n-3}-...-f_{n-4}x^3-f_{n-3}x^2-f_{n-2}x-f_{n-1}\end{aligned}$$

$$=1\bullet x^n+1\bullet x^{n-1}-1\bullet x^{n-1}+(f_3-f_2-f_1)x^{n-2}+(f_4-f_3-f_2)x^{n-3}+\ldots$$
$$+(f_{n-2}-f_{n-3}-f_{n-4})x^3+(f_{n-1}-f_{n-2}-f_{n-3})x^2+(f_n-f_{n-1}-f_{n-2})x$$
$$=x^n+0\cdot x^{n-1}+0\cdot x^{n-2}+0\cdot x^{n-3}+\ldots+0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x=x^n,$$

што и требаше да се докаже. ♦

Задача 1. Ако во равенството (5) ставиме $x=1$ и прво искористиме дека $f_n+f_{n-1}=f_{n+1}$, а потоа $f_n+f_{n+1}=f_{n+2}$ и последователно добиваме:

$$1^n=(1^2-1-1)(f_1\cdot 1^{n-2}+f_2\cdot 1^{n-3}+f_3\cdot 1^{n-4}+\ldots+f_{n-2}\cdot 1+f_{n-1})+f_n\cdot 1+f_{n-1}$$
$$f_1+f_2+f_3+\ldots+f_{n-2}+f_{n-1}=f_n+f_{n-1}-1$$
$$f_1+f_2+f_3+\ldots+f_{n-2}+f_{n-1}+f_n=f_n+f_{n-1}-1+f_n$$
$$f_1+f_2+f_3+\ldots+f_{n-2}+f_{n-1}+f_n=f_{n+1}-1+f_n$$
$$f_1+f_2+f_3+\ldots+f_{n-2}+f_{n-1}+f_n=f_{n+2}-1,$$

и тоа е познатата формула за збирот на првите n Фибоначиеви броеви. ♦

Задача 2. Прво да забележиме дека

$$\alpha(1-\alpha)=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\frac{1^2-\sqrt{5}^2}{2^2}=\frac{1-5}{4}=-1. \tag{6}$$

Ако во (5) замениме $x=\alpha$ и земеме предвид дека α е корен на полиномот x^2-x-1 добиваме

$$\alpha^n=f_n\alpha+f_{n-1}. \tag{7}$$

Слично, ако во (5) замениме $x=1-\alpha$ и земеме предвид дека $1-\alpha$ е корен на полиномот x^2-x-1 добиваме

$$(1-\alpha)^n=f_n(1-\alpha)+f_{n-1}. \tag{8}$$

Ги множеме равенствата (7) и (8) и ако го искористиме равенството (6) и фактот дека $f_n+f_{n-1}=f_{n+1}$ последователно добиваме

$$\alpha^n(1-\alpha)^n=(f_n\alpha+f_{n-1})(f_n(1-\alpha)+f_{n-1})$$
$$[\alpha(1-\alpha)]^n=f_n^2\alpha(1-\alpha)+f_{n-1}f_n\alpha+f_{n-1}f_n-f_{n-1}f_n\alpha+f_{n-1}^2$$
$$(-1)^n=-f_n^2+f_{n-1}(f_n+f_{n-1})$$
$$f_{n-1}f_{n+1}-f_n^2=(-1)^n,$$

и тоа е познатиот Cassini-ев идентитет, т.е. уште една позната формула за Фибоначиевите броеви. ♦

Задача 3. Нека се $m,n\geq 2$. Од (7) имаме

$$\alpha^n=f_n\alpha+f_{n-1},\ \alpha^m=f_m\alpha+f_{m-1}\ \text{и}\ \alpha^{n+m}=f_{n+m}\alpha+f_{n+m-1},$$

па затоа

$$f_{n+m}\alpha+f_{n+m-1}=\alpha^{n+m}=\alpha^n\alpha^m=(f_n\alpha+f_{n-1})(f_m\alpha+f_{m-1})$$

и како $\alpha^2 = \alpha + 1$ последователно ги добиваме следниве еквивалентни равенства

$$f_{n+m}\alpha + f_{n+m-1} = f_n f_m \alpha^2 + f_{n-1} f_m \alpha + f_n f_{m-1}\alpha + f_{n-1} f_{m-1} \quad \Leftrightarrow$$
$$f_{n+m}\alpha + f_{n+m-1} = f_n f_m \alpha + f_n f_m + f_{n-1} f_m \alpha + f_n f_{m-1}\alpha + f_{n-1} f_{m-1} \quad \Leftrightarrow$$
$$f_{n+m}\alpha + f_{n+m-1} = (f_n f_m + f_{n-1} f_m + f_n f_{m-1})\alpha + f_n f_m + f_{n-1} f_{m-1} \quad \Leftrightarrow$$
$$f_{n+m}\alpha + f_{n+m-1} = (f_n f_{m+1} + f_{n-1} f_m)\alpha + f_n f_m + f_{n-1} f_{m-1} \quad \Leftrightarrow$$
$$(f_{n+m} - f_n f_{m+1} - f_{n-1} f_m)\alpha = f_{n+m-1} - f_n f_m - f_{n-1} f_{m-1},$$

и како во последното равенство левата страна е ирационален, а десната страна е цел број добиваме

$$f_{n+m-1} = f_n f_m + f_{n-1} f_{m-1}. \ \blacklozenge \qquad (9)$$

Задача 4. Ако во равенството (9) ставиме $m = n+1$ и ако искористиме дека $f_n + f_{n-1} = f_{n+1}$, т.е. $f_n = f_{n+1} - f_{n-1}$ последователно добиваме

$$f_{n+n+1-1} = f_n f_{n+1} + f_{n-1} f_{n+1-1} \quad \Leftrightarrow$$
$$f_{2n} = f_{n+1}(f_{n+1} - f_{n-1}) + f_{n-1} f_n \quad \Leftrightarrow$$
$$f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n+1} f_{n-1} + f_{n-1} f_n \quad \Leftrightarrow$$
$$f_{2n} = f_{n+1}^2 - (f_n + f_{n-1}) f_{n-1} + f_{n-1} f_n \quad \Leftrightarrow$$
$$f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_n f_{n-1} - f_{n-1}^2 + f_{n-1} f_n \quad \Leftrightarrow$$
$$f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2,$$

и ова е уште едно позната формула за Фибоначиевите броеви. ♦

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1. Ставете во равенството (5) $x = -1$ и $n = 2k$ и докажете дека
$$f_1 - f_2 + f_3 - ... - f_{2k-2} + f_{2k-1} = f_{2k-2} + 1$$
2. Во равенството (9) земете $m = n+2$, а потоа $n = 2n+1$ и ќе добиете уште две интересни формули за Фибоначиевите броеви.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Abbas Roohol Amini:** *Fibonacci Numbers a Long Division Formula*, Mathematical Spectrum, Vol. 40, Number 2, 2007/08
2. **Jens Carstensen, Alija Muminagić:** *Fibonaccital og polynomiers division*, Matematik Magasinet 40, yuni, 2008

Статијата првпат е објавенаво списанието СИГМА на СММ