Регионален натпревар 1979

I година

1. а) Да се упрости изразот

$$A=\frac{a^2-1}{n^2+an}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}-1\right)\frac{a-an^3-n^4+n}{1-a^2}.$$

б) Дали за некој природен број n, бројот A е природен број

Решение. а) Имаме

$$\begin{aligned}A&=\frac{a^2-1}{n^2+an}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}-1\right)\frac{a-an^3-n^4+n}{1-a^2}\\&=\frac{1}{n(n+a)}\left(\frac{n}{n-1}-1\right)\frac{-(n^3-1)(a+n)}{-1}\\&=\frac{1}{n(n+a)}\frac{n-n-1}{n-1}\frac{-(n^3-1)(a+n)}{-1}\\&=\frac{1}{n}\frac{1}{n-1}(n-1)(n^2+n+1)\\&=\frac{n^2+n+1}{n}=n+1+\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

б) Користејќи го резултатот под а), имаме дека A е природен број ако и само ако $\frac{1}{n}$ е природен број, а тоа е можно за $n=1$. Но, изразот A не е дефиниран за $n=1$, па следствено, A не може да биде природен број за ниту една вредност на природниот број n.

2. Морска вода содржи 5% сол (тежински). Колку килограми обична вода треба да се дотури на 40 килограми морска вода, за да во новодобиената вода да има 2% сол?

Решение. Морската вода содржи 5% сол; значи, во 100 килограми вода има 5 килограми сол. Ако со x го означиме количеството сол (во килограми) што се наоѓа во 40 килограми морска вода, ќе имаме

$$\begin{array}{ll}100\,\text{кгр. м.в.} & 5\,\text{кгр. сол}\\ 40\,\text{кгр. м.в.} & \text{x кгр. сол}\\ \hline \multicolumn{2}{c}{100x=200}\end{array}$$

Значи, во 40 килограми морска вода има $x=2$ килограми сол.

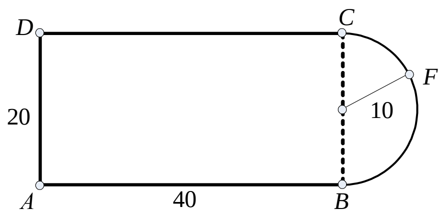
Да го означиме со y количеството обична вода (во килограми), што треба да се додаде на 40 килограми морска вода, за новодобиената вода да содржи 2% сол.

Како и во претходната дискусија, имаме

$$\begin{array}{ll}100\ \text{кгр. м.в.} & 2\ \text{кгр. сол}\\ 40+\text{y}\ \text{кгр. м.в.} & 2\ \text{кгр. сол}\\ \hline \multicolumn{2}{c}{2(40+y)=200}\end{array}$$

$y = 60$ килограми морска вода.

3. Еден базен, длабок 2 m, има облик како на цртежот. Притоа правоаголникот $ABCD$ е со димензии 40×20 m, а радиусот на полукругот CFB е 10 m. Ако дебелината на ѕидовите и дното на базенот е 30 cm, да се пресмета колку m^3 бетон се потребни за негова изградба.



Решение. Да го означиме со V_1 волуменот на "телото", формирано од надворешните страни на ѕидовите на базенот, а со V_2-волуменот на „телото" формирано од внатрешните страни. Имаме

$$V_1 = 40,3 \cdot 30,6 \cdot 2,3 + \frac{10,3^2 \pi \cdot 2,3}{2} = 1909,414 + 122,0035\pi$$

$$V_2 = 40 \cdot 20 \cdot 2 + \frac{10^2 \pi \cdot 2}{2} = 1600 + 100\pi$$

Волуменот на ѕидовите на базенот, а со тоа и бараните m^3 бетон коишто се потребни за изградба на базенот, изнесува

$$V = V_1 - V_2 = 309,414 + 22,0035\pi \approx 378,54 \text{ m}^3.$$

4. Еден природен број е делив со 9 ако и само ако збирот на неговите цифри е број делив со 9. Докажи!

Решение. Знаеме дека секој природен број n може да се запише во облик

$$n = 10^k a_k + 10^{k-1} a_{k-1} + ... + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_\circ,$$

каде што $a_\circ$ е цифрата на единиците, a_1 е цифрата на десетките, a_2 е цифрата на стотките итн. Имаме

$$\begin{aligned} n &= a_\circ + a_1 + ... + a_k + 9a_1 + 99a_2 + ... + \underset{k}{99...9}\, a_k \\ &= (a_\circ + a_1 + ... + a_k) + 9(a_1 + 11a_1 + ... + \underset{k}{11...1}\, a_k) \end{aligned}$$

Бидејќи вториот собирок е секогаш делив со 9, имаме дека природниот број n е делив со 9 ако и само ако првиот собирок, т.е. збирот на неговите цифри е делив со 9. Со тоа е докажано тврдењето на задачата.

II година

1. Ако од една страница на една книга се отфрлат по три букви од секој ред и потоа се извадат два такви реда, бројот на сите букви ќе се намали за 145. Ако пак додадеме на секој ред по четири букви и допишеме три такви реда, тогаш бројот на сите букви ќе се зголеми за 224. Колку редови има на таа страница и по колку букви има во секој ред?

Решение. Нека на таа страница има x редови, а во секој ред по y букви. Од првиот услов на задачата ја наоѓаме равенката

$$3x+2(y-3)=145 \qquad (1)$$

а од вториот, равенката

$$4x+3(y+4)=224\,. \qquad (2)$$

Решавајќи го системот равенки, составен од равенките (1) и (2), добиваме $x=29$, $y=32$. Значи, на споменатата страница од книгата има 29 реда, а во секој ред по 32 букви.

2. Да се упрости изразот

$$A=(1+\tfrac{1+i}{2})(1+(\tfrac{1+i}{2})^2)(1+(\tfrac{1+i}{2})^4)(1+(\tfrac{1+i}{2})^8)$$

(i е имагинарна единица)

Решение. Бидејќи

$$(\tfrac{1+i}{2})^2=\tfrac{i}{2}\,,\quad (\tfrac{1+i}{2})^4=\tfrac{-1}{4}\,,\quad (\tfrac{1+i}{2})^8=\tfrac{1}{16}\,,$$

имаме

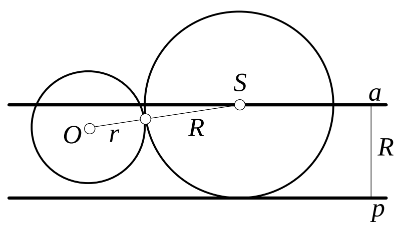
$$A=(1+\tfrac{1+i}{2})(1+(\tfrac{1+i}{2})^2)(1+(\tfrac{1+i}{2})^4)(1+(\tfrac{1+i}{2})^8)=\tfrac{1}{2}(3+i)\tfrac{1}{2}(2+i)\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{17}{16}=\tfrac{255}{256}(1+i)$$

3. Нека се дадени една кружница и една права.

а) Конструирај кружница со даден радиус која ги допира дадената кружница и дадената права.

б) Да се изврши дискусија за бројот на решенија на дадената задача.

Решение. а) Нека p е дадената права, $k(O,r)$ дадената кружница и $k(S,R)$ бараната кружница (види цртеж). Бидејќи $k(S,R)$ ја допира p, следува дека S лежи на правата a, паралелна со p и на растојание R од неа. Исто така, S ќе мора да лежи на кружницата $k(O,R+r)$ односно на $k(O,|R-r|)$, па S ќе биде пресек на таа кружница со правата a.

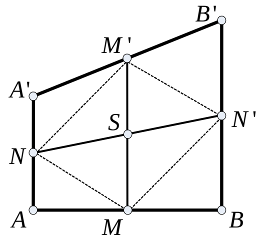


б) Задачата може да има најмногу 8 решенија, зошто две прави и две кружници се сечат најмногу во 8 точки, а има најмалку две решенија.

Задачата не ќе има решение ако правата p и кружницата $k(O,R+r)$ односно $k(O,|R-r|)$ не се сечат, а тоа е можно во случај кога $2R+r$ е помало од растојанието на O од правата p.

4. Нека M е средина на отсечката AB, а M' е средина на отсечката $A'B'$. Докажи дека средините на отсечките AA', BB' и MM' се колинеарни.

Решение. Нека N е средина на отсечката AA', N' е средина на отсечката BB' и S е средина на отсечката MM' (види цртеж).



Доволно е да докажеме дека четириаголникот $MN'M'N$ е паралелограм (образложение: дијагоналите во секој паралелограм се преполовуваат; S е средина на дијагоналата MM'; значи, дијагоналата NN' мора да минува низ точката S, што повлекува дека точките N, S и N' се колинеарни). За таа цел ќе докажеме дека векторите $\overrightarrow{MN'}$ и $\overrightarrow{NM'}$ се еднакви, што повлекува дека четириаголникот $MN'M'N$ е паралелограм. Имаме:

$$\overrightarrow{MN'} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN'} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}) = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'}) = \overrightarrow{NA'} + \overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{NM'}.$$

III година

1. Нека е $f(x) = ax^2 + bx + 1$.

а) Да се одреди $f(x+1) - f(x)$.

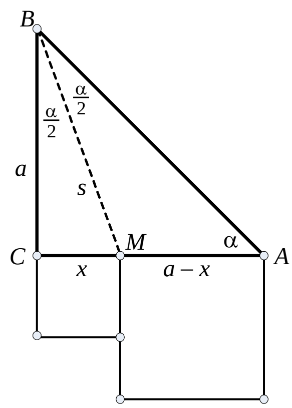
б) Ако $f(x+1) - f(x) = x$, да се најдат a и b.

Решение. Имаме

а) $f(x+1) - f(x) = a(x+1)^2 + b(x+1) + 1 - ax^2 - bx - 1 = 2ax + a + b$

б) Од $f(x+1) - f(x) = x$ имаме $2a = 1$ и $a + b = 0$, т.е. $a = \frac{1}{2}$ и $b = -\frac{1}{2}$.

2. Во рамнокрак правоаголен триаголник ABC, конструирана е симетралата на острииот агол кај темето B, која што ја сече страната CA во точката M. Над отсечките AM и CM се конструирани квадрати. Докажи дека плоштината на едниот квадрт е двапати поголема од плоштината на другиот.



Решение. Согласно со ознаките од цртежот имаме $P_1 = x^2$ и $P_2 = (a-x)^2$, каде што P_1 и P_2 се плоштините на соодветните квадрати. Бидејќи

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\frac{x}{s}\frac{a}{s} = \frac{2ax}{s^2}, \qquad (1)$$

$$\sin\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad (2)$$

од (1) и (2) добиваме $\frac{2ax}{s^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, т.е.

$$s^2=2\sqrt{2}ax\,. \tag{3}$$

Од друга страна

$$s^2=a^2+x^2\,. \tag{4}$$

Равенствата (3) и (4) ја даваат квадратната равенка

$$x^2-2\sqrt{2}ax+a^2=0\,,$$

чии решенија се $x_1=a\sqrt{2}+a$ и $x_2=a\sqrt{2}-a$. Бидејќи $a\sqrt{2}+a>a$, предвид доаѓа само второто решение $x_2=a\sqrt{2}-a$. Значи,

$$P_1=(\sqrt{2}-1)^2a^2=(3-2\sqrt{2})a^2 \text{ и}$$

$$\begin{aligned}P_2&=(a-x)^2=(a-a\sqrt{2}+a)^2=(2-\sqrt{2})^2a^2\\&=(6-4\sqrt{2})a^2=2(3-2\sqrt{2})a^2=2P_1,\end{aligned}$$

што требаше да се докаже.

3. а) Да се упрости изразот $A=\frac{\sin 2x-\cos 2x+1}{\sin 2x+\cos 2x-1}$.

б) За кои вредности на x , $A>0$?

Решение. а) Користејќи ги тригонометриските идентитети, имаме

$$\begin{aligned}A&=\frac{\sin 2x-\cos 2x+1}{\sin 2x+\cos 2x-1}=\frac{2\sin x\cos x-\cos^2 x+\sin^2 x+1}{2\sin x\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x+1}\\&=\frac{2\sin x(\cos x+\sin x)}{2\sin x(\cos x-\sin x)}=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}=\frac{1+\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}x},\end{aligned}$$

при што $\sin x\neq 0$ и $\cos x\neq 0$.

б) Имаме, $A>0$ ако и само ако $\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x>0$. Според тоа

$$2x\in(2k\pi,\tfrac{\pi}{2}+2k\pi)\cup(\tfrac{3\pi}{2}+2k\pi,2\pi+2k\pi)$$

$$x\in(k\pi,\tfrac{\pi}{4}+k\pi)\cup(\tfrac{3\pi}{4}+k\pi,\pi+k\pi)\,,\ k\in\mathbb{Z}\,.$$

4. Да се реши равенката (по x)

$$\log_{ax}a+3\log_{a^2x}a=0\,,\text{ ако } a>1\,.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}\log_{ax}a+3\log_{a^2x}a&=\frac{1}{\log_a ax}+\frac{3}{\log_a a^2x}\\&=\frac{\log_a a^2x+3\log_a ax}{\log_a ax\cdot\log_a a^2x}\\&=\frac{\log_a a^5x^3}{\log_a ax\cdot\log_a a^2x},\end{aligned}$$

притоа, $x\neq\frac{1}{a}$ и $x\neq\frac{1}{a^2}$. Значи, дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$\frac{\log_a a^5x^3}{\log_a ax \cdot \log_a a^2x} = 0,$$

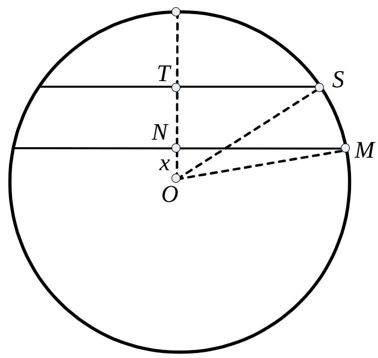
од каде што се добива $\log_a a^5x^3 = 0$, т.е. $x = \frac{1}{a\sqrt[4]{a}}$.

IV година

1. Една топка е пресечена со две паралелни рамнини кои се наоѓаат од иста страна на нејзиниот центар и на растојание од 3 cm меѓу себе. Круговите добиени како пресеци на топката со рамнините, имаат радиуси 9 cm односно 12 cm.

Пресметај го волуменот на топката.

Решение. Ако топката, заедно со нејзините пресеци, ортогонално ја проектираме на рамнина, нормална на пресечните рамнини, ја добиваме сликата како на цртежот десно. Од правоаголните триаголници OMN и OST, согласно Питагоровата теорема, ги добиваме равенствата



$$R^2 = 12^2 + x^2 \text{ и } R^2 = 9^2 + (3+x)^2,$$

од каде што добиваме $x = 9$ и $R = 15 \text{ cm}$.

Според тоа, $V = \frac{4R^3\pi}{3} = 4500\pi \text{ cm}^3$.

2. Најди го збирот на сите четирицифрени броеви коишто се добиваат од цифрите 1,2,3 и 4, при што цифрите не се повторуваат.

Решение. Од начинот на формирањето на четирицифрените броеви воочуваме дека станува збор за пермутации без повторување и нивниот вкупен број е $4! = 24$. На прво место, односно второ, трето, четврто место во четирицифрените броеви, цифрата 1 се јавува $3! = 6$ пати. Истото се однесува и за цифрите 2,3 и 4. Имајќи го предвид ова, за збирот S имаме:

$$S = 6 \cdot 1000(1+2+3+4) + 6 \cdot 100(1+2+3+4) + 6 \cdot 10(1+2+3+4) = 66660.$$

3. Ако за една низа $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ се знае дека важи $\frac{S_m}{S_k} = \frac{m^2}{k^2}$, за секои $k, m \in \mathbb{N}$ каде што $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$, да се докаже дека

$$\frac{a_m}{a_k} = \frac{2m-1}{2k-1}.$$

Решение. Имаме

$$S_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_m, \qquad S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$$

$$a_m = S_m - S_{m-1}, \qquad a_k = S_k - S_{k-1},$$

па според тоа

$$\frac{a_m}{a_k}=\frac{S_m-S_{m-1}}{S_k-S_{k-1}}=\frac{\frac{S_m}{S_{m-1}}-1}{\frac{S_k}{S_{m-1}}-\frac{S_{k-1}}{S_{m-1}}}=\frac{\frac{m^2}{(m-1)^2}-1}{\frac{k^2}{(m-1)^2}-\frac{(k-1)^2}{(m-1)^2}}$$

$$=\frac{m^2-(m-1)^2}{k^2-(k-1)^2}=\frac{2m-1}{2k-1}.$$

4. а) Одреди го геометриското место на средините на тетивите на една кружница C, кои лежат на прави што минуваат низ дадена точка.

б) Изврши дискусија.

Решение. а) Нека равенката на кружницата е

$$x^2+y^2=r^2, \tag{1}$$

а равенката на правите на тетивите што минуваат низ точка $A(a,b)$

$$y-b=k(x-a). \tag{2}$$

Ако од (1) и (2) извршиме елиминација на y, ја добиваме квадратната равенка

$$(1+k^2)x^2+2k(b-ak)x+(ka-b)^2-r^2=0,$$

чии што решенија ќе ги означиме со x_1 и x_2. Координатите на бараното геометриско место се: $x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$, $y=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$. Од Виетовите формули и од равенката (2), добиваме

$$x=k\frac{ka-b}{1+k^2},\ y=\frac{b-ka}{1+k^2}. \tag{3}$$

Елиминирајќи го k од равенствата (3), ја добиваме равенката на бараното геометриско место која гласи

$$(x-\tfrac{a}{2})^2+(y-\tfrac{b}{2})^2=\frac{a^2+b^2}{4}. \tag{4}$$

б) Бараното геометриско место е кружницата (4), ако точката A е во внатрешноста на кружницата (1); дел од кружницата (4), ако A е надвор од кругот определен со равенката (1).