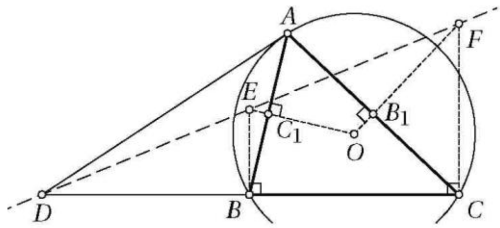
БМО 2003

1. Дали постои множество B кое се состои од 4004 природни броеви такво што за секое негово подмножество A кое има 2003 елементи збирот на елементите на множеството A не е делив со 2003?

   Решение. Постои. Доволно е да земеме множество B кое се состои од 2002 броја од видот $2003k$ и 2002 броја од видот $2003k+1$. Навистина, ако 2003-елементно множество $A \subset B$ содржи m елементи од облик $2003k+1$ и $2003-m$ елементи од облик $2003k$ (каде $1 \le m \le 2002$), тогаш збирот на неговите елементи е конгруентен со m по модул 2003.

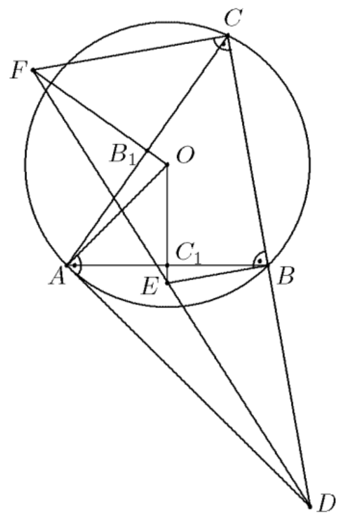
2. Нека ABC е триаголник таков што $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Нека D е пресечната точка на тангентата на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката A и правата BC. Нека E и F се точки соодветно на симетралите на отсечките AB и AC такви што BE и CF се нормални на BC. Докажи дека точките D, E и F се колинеарни.

   Решение. *Прв начин.* Доволно е да се докаже дека $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{CF}}$. Нека B_1 и C_1 се соодветно средините на страните AC и AB. Од сличноста на триаголниците DBA и DAC следува $\frac{\overline{DB}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$, па



   затоа $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$. Од друга страна, имаме $\overline{BE} = \frac{\overline{BC_1}}{\cos \measuredangle ABE} = \frac{\overline{AB}}{2\sin \measuredangle ABC}$ и, слично, $\overline{CF} = \frac{\overline{AC}}{2\sin \measuredangle ACB}$. Според тоа, $\frac{\overline{BE}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{AB}\sin \measuredangle ACB}{\overline{AC}\sin \measuredangle ABC} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$.

   Втор начин. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $\measuredangle ABC > \measuredangle ACB$. АКо C_1 и B_1 се средините соодветно на AB и AC, тогаш $\measuredangle FCB_1 = 90^\circ - \gamma$ и $\measuredangle C_1BE = 90^\circ - \beta$ (ако $90^\circ \ge \beta$) или $\measuredangle C_1BE = \beta - 90^\circ$ (ако $90^\circ < \beta$). Тогаш $\overline{BE} = \frac{c}{2\sin\beta}$ и $\overline{CF} = \frac{b}{2\sin\gamma}$. Бидејќи $\measuredangle BAD = \gamma$, од синусната теорема за триаголниците ABD и ADC следува $\overline{DB} = \frac{c\sin\gamma}{\sin(\beta-\gamma)}$ и $\overline{DC} = \frac{b\sin(\gamma+\alpha)}{\sin(\beta-\gamma)}$. Според тоа,



$$\frac{\overline{DB}}{\overline{BE}}=\frac{2\sin\gamma\sin\beta}{\sin(\beta-\gamma)}=\frac{\overline{DC}}{\overline{CF}},$$

што значи дека $\triangle DBE \sim \triangle DCF$. Но, тоа значи дека $\measuredangle BDE=\measuredangle CDF$, т.е. точките D, E и F се колинеарни.

3. Определи ги сите функции $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ такви што
   1) $f(x+y)-yf(x)-xf(y)=f(x)f(y)-x-y+xy$, за секои $x,y\in\mathbb{Q}$,
   2) $f(x)=2f(x+1)+2+x$, за секој $x\in\mathbb{Q}$,
   3) $f(1)+1>0$.

Решение. Условот 1) е еквивалентен со условот

$$f(x+y)+x+y=(f(x)+x)(f(y)+y).$$

Воведуваме смена $g(x)=f(x)+x$ и условите 1) – 3) ги добиваат облиците

$$g(x+y)=g(x)g(y),\quad g(x+1)=\tfrac{1}{2}g(x),\quad g(1)>0. \tag{*}$$

Понатаму, од $g(1)=g(1)g(0)$ следува $g(0)=1$, а од $g(0)=g(x)g(-x)$ следува дека $g(x)\neq 0$. Од првиот услов во (*) следува $g(x)=g(\frac{x}{2})^2>0$ за секој $x\in\mathbb{Q}$.

Ако ставиме $h(x)=\log_2 g(x)$, тогаш од условите (*) добиваме

$$h(x+y)=h(x)+h(y) \tag{**}$$

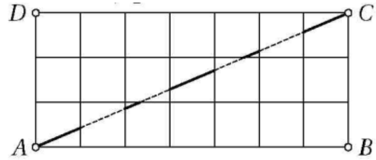
$$h(x+1)=h(x)-1 \tag{***}$$

Според (**) функцијата h ја задоволува Кошиевата равенка, па затоа $h(x)=h(1)x$, за $x\in\mathbb{Q}$, а од (***) добиваме $h(1)=h(0)-1=-1$. Според тоа, $h(x)=-x$, па затоа $g(x)=2^{-x}$ и $f(x)=2^{-x}-x$. Лесно се проверува дека оваа функција ги задоволува условите 1) – 3).

4. Нека m и n се заемно прости непарни природни броеви. Правоаголникот $ABCD$ е таков што $\overline{AB}=m, \overline{AD}=n$ и е поделен на mn единечни квадрати. Со $A_1, A_2, ..., A_k$ да ги означиме последователните пресечни точки на дијагоналата AC со страните на делбените единечни квадрати ($A_1=A, A_k=C$). Докажи, дека

$$\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{j+1}\overline{A_jA_{j+1}}=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{mn}. \tag{*}$$

Решение. *Прв начин*. Да поставиме координатни оски x и y соодветно на правите AB и AD. Со B_x да ја означиме точката $(\frac{x}{n},\frac{x}{m})$. Сите точки A_i припаѓаат на множеството



$$\{B_x \mid x = 1, 2, \ldots, mn\}.$$

Притоа бројот на пресеците на полуотворените отсечки $(A, B_x]$ со страните на единичните квадратие еднаков на $i(x) = [\frac{x}{m}] + [\frac{x}{n}]$, па затоа отсечката $B_x B_{x+1}$ лежи на отсечката $A_{i(x)+1} A_{i(x)+2}$. Според тоа,

$$\sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1} \overline{A_j A_{j+1}} = \sum_{x=0}^{mn-1} (-1)^{i(x)} \overline{B_x B_{x+1}} = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{mn} \sum_{x=0}^{mn-1} (-1)^{[\frac{x}{m}]+[\frac{x}{n}]}. \tag{1}$$

Нека r_x и s_x се соодветно остатоците од делењето на x со m и n. Тогаш $[\frac{x}{m}] + [\frac{x}{n}]$ има иста парност како и $r_x + s_x$, па како паровите (r_x, s_x), $x = 0, 1, \ldots, mn-1$ всушност се паровите $(a, b), 0 \le a < m, 0 \le b < n$, добиваме

$$\sum_{x=0}^{mn-1} (-1)^{[\frac{x}{m}]+[\frac{x}{n}]} = \sum_{x=0}^{mn-1} (-1)^{r_x + s_x} = \sum_{a=0}^{m-1} (-1)^a \sum_{b=0}^{n-1} (-1)^b = 1. \tag{2}$$

Конечно, од равенствата (1) и (2) следува равенсвото (*).

Втор начин. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $m \ge n$. Ќе велиме дека отсечката $A_p A_{p+1}$ е од прв вид, ако точките A_p и A_{p+1} се пресечни точки на AC со вертикални страни на единечните квадрати. Кога една од точките A_p или A_{p+1} е пресечна точка на AC со хоризонтална страна на единечен квадрат, ќе велиме дека отсечката $A_p A_{p+1}$ е од втор вид.

Дијагоналата AC ги сече $m-1$ пати вертикалните страни и $n-1$ пати хоризонталните страни. Бидејќи $\mathrm{NZD}(m, n) = 1$ сите пресечни точки се различни и затоа тие ја делат AC на $m+n-1$ отсечки. Бидејќи првиот собирок е со знак + и $m+n-1$ е непарен број, добиваме дека позитивните собироци се за еден повеќе од негативните. Да забележиме дека ако A_p е пресечна точка на AC со хоризонтална страна, тогаш $A_{p-1} A_p$ и $A_p A_{p+1}$ се од втор вид и имаат спротивни знаци. Според тоа, отсечките од првиот вид со знак + се за една повеќе од отсечките од првиот вид со знак –, што значи дека отсечките од првиот вид во бараниот збир даваат допринос тоќчно една таква отсечка, односно $\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}$.

Да поставиме координатни оски x и y соодветно на правите AB и AD. За фиксиран $k = 1, 2, \ldots, n-1$ нека $km = t_k n + r_k$, каде $0 < r_k < n$. Тогаш пресечната точка на AC со хоризонталната права k (не ја броиме AB) има координати $(t_k + \frac{r_k}{n}, k)$ и тоа е точката со број $s = k + t_k + 1$. Тоа значи дека кога $k + t_k$ е парен, тогаш $A_{s-1} A_s$ има знак – и $A_s A_{s+1}$ има знак +. Аналогно, кога $k + t_k$ е непарен, тогаш $A_{s-1} A_s$ има знак + и $A_s A_{s+1}$ има знак –.

Да забележиме дека r_k ја има истата парност како $k+t_k$. Навистина, ако k е парен број, тогаш $t_k n+r_k$ е парен број, што значи дека t_k и r_k имаат иста парност. Ако k е непарен број, тогаш $t_k n+r_k$ е непарен број, т.е. t_k и r_k се со различна парност. И во двата случаја r_k и $k+t_k$ имаат иста парност.

Од друга страна, бидејќи $pm \equiv qm \pmod{n}$ дава $p \equiv q \pmod{n}$, добиваме дека r_k ги прима сите остатоци по модул n. Според тоа, кога r_k е парен број имаме

$$-\overline{A_{s-1}A_s}+\overline{A_sA_{s+1}}=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}\cdot\frac{-r_k+(n-r_k)}{n},$$

а кога r_k е непарен број имаме

$$+\overline{A_{s-1}A_s}-\overline{A_sA_{s+1}}=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}\cdot\frac{-r_k-(n-r_k)}{n}.$$

$$\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+1}\overline{A_iA_{i+1}}=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{mn}\left(1+\sum_{s=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{n-4s}{n}+\sum_{s=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{4s-2-n}{n}\right)=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{mn}\left(1-\frac{n-1}{2}\right)=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{mn}.$$