Статијата прв пат е објавена во списанието Математичко-физички лист на ДМФА на Хрватска во 1960

Povećanje tačnosti rešenja jednačina nađenih grafičkim putem

NIKOLA LJ. ĆIRIĆ, Pirot

A) Mnogi teoriski i praktični problemi svode se na neku jednačinu, algebarsku ili transcendentnu*, čija rešenja pretstavljaju i rešenja odgovarajućeg problema. Iz toga razloga je rešavanje jednačina posebno važan zadatak matematike. Metode za rešavanje jednačina su raznovrsne i treba znati da ne postoji neka univerzalna metoda, neki šablonski postupak

---

* Jednačine se dele na algebarske i transcendentne prema tome koje su računske operacije primenjene nad argumentom.

koji uvijek dovodi do rezultata. Sve postojeće metode ipak možemo svrstati u dve osnovne grupe: metode koje daju točne rezultate, i koje se u veoma ograničenom broju slučajeva mogu primeniti, i metode koje daju približbne vrednosti rešenja — približne metode — koje se primenjuju u ogromnoj većini slučajeva. U srednjoj školi upoznali smo se delimično sa obema metodama. Kod linearnih, kvadratnih, bikvadratnih, binomnih kao i nekih trigonometrijskih jednačina dolazili smo do tačnih rešenja putem izvesnih obrazaca koji su rešenja tih jednačina izražavali pomoću njenih koeficijenata. Rešavajući kvadratne jednačine grafičkom metodom vidjeli smo kako se njena rešenja mogu približno odrediti. Upravo je baš grafička *metoda jedna od približnih*.

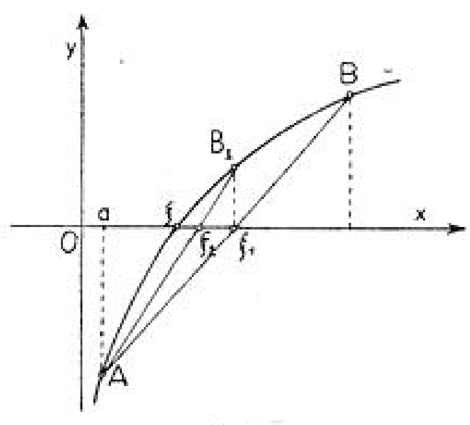
Zadržimo se na grafičkoj metodi jer je ona osnov mnogih približnih metoda. Naime, ako treba rešiti jednačinu $f(x) = 0$, onda ćemo najpre u koordinatnom sistemu XOY konstruisati grafik funkcije $y = f(x)$. Rešenja jednačine $f(x) = 0$, kao što znamo su one vrednosti argumenta x za koje je funkcija $y = f(x)$ jednaka nuli (nule funkcije). Prema tome, apscise zajedničkih tačaka grafika funkcije $y = f(x)$ sa OX osom predstavljaju rešenja date jednačine $f(x) = 0$.

Često je prilikom grafičkog rešavanja jednačine $f(x) = 0$ zgodno funkciju $y = f(x)$ napisati u obliku razlike dve funkcije, tj. $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$. Ako je $f(\xi) = 0$, onda je i $f_1(\xi) - f_2(\xi) = 0$ tj. $f_1(\xi) = f_2(\xi)$, što znači da su rešenja jednačine $f(x) = 0$ one vrednosti $x = a$ za koje je $f_1(x) = f_2(x)$, dakle, to su apscise zajedničkih tačaka krivih linija $y = f_1(x)$ i $y = f_2(x)$. Prema tome, treba konstruisati grafike funkcija $y = f_1(x)$ i $y = f_2(x)$ pa izmeriti apscise njihovih zajedničkih tačaka. Te apscise su tražena rešenja jednačine $f(x) = 0$. Ovo je veoma važno jer je lakše konstruisati grafike funkcija $y = f_1(x)$ i $y = f_2(x)$ nego grafik funkcije $y = f(x) = f_1(x) - f_2(x)$.

Sa kojom ćemo tačnošću odrediti grafičkim putem rešenja jednačine zavisi od tačnosti crtanja.** Ova tačnost uglavnom ne može biti zadovoljavajuća. Pored toga nedostatak ove metode je u tome što se rešenja jednačine ne mogu odrediti sa unapred željenom tačnošću, na pr. sa tačnošću od 10^{-1} ili 10^{-2}. Grafička metoda je osnov nekim približnim metodama kojima se tačnost rešenja nađena grafičkim putem može povećati, upravo pomoću kojih se rešenja mogu odrediti sa unapred željenom tačnošću.

B) Pretpostavimo da treba rešiti jednačinu $f(x) = 0$. Najpre ćemo konstruisati grafik odgovarajuće funkcije $y = f(x)$ i uočiti deo AB tog grafika sa raznih strana ose OX, dakle u blizini njegove presečne tačke sa osom OX (slika 1). Sa grafika vidimo da se rešenje ξ nalazi između apscisa a i b tačaka A i B, tj. $a < \xi < b$.

Pošto je ovaj interval veliki to je tačnost sa kojom je rešenje ξ određeno sasvim nedovoljna. Pokažimo kako se tačnost može povećati.



Sl. 1

U tu svrhu napisaćemo jednačinu sečice koja prolazi kroz tačke $A[a, f(a)]$ i $B[b, f(b)]$ krive $y = f(x)$:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \tag{1}$$

Stavljajući sada u jednačinu (1) $y = 0$ dobijamo apscisu ξ_1 presečne tačke sečice (1) sa osom OX, tj.

$$\xi_1 = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)} \tag{2}$$

ξ_1 je približna vrednost rešenja ξ i $a < \xi_1 < b$. Formula (2) se obično zove *regula falsi*.

Napisavši sada jednačinu sečice koja prolazi kroz tačke $A[a, f(a)]$ i $B_1[\xi_1, f(\xi_1)]$, ako tačke A i B_1 leže sa raznih strana ose OX (kao na slici 1), ili kroz tačke $B[b, f(b)]$ i $B_1[\xi_1, f(\xi_1)]$, ako tačke B i B_1 leže sa raznih strana ose OX, i stavljajući u njoj $y = 0$, dobićemo sledeću približnu vrednost ξ_2 rešenja jednačine $f(x) = 0$, tj.

$$\xi_2 = \frac{a \cdot f(\xi_1) - \xi_1 \cdot f(a)}{f(\xi_1) - f(a)} \tag{3}$$

** Grafičkom metodom se određuju samo realna rešenja.

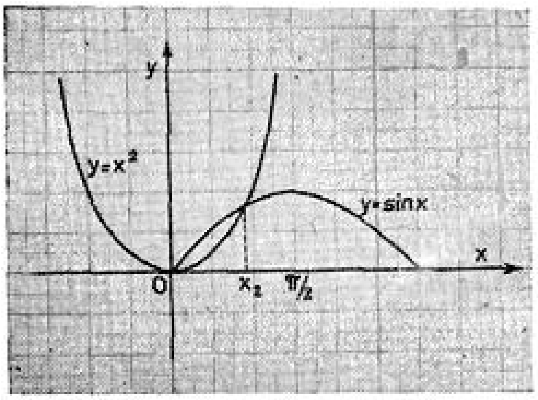
Interval (a, b) u kome se nalazilo rešenje ξ je sada sužen na interval (a, ξ_1), odnosno (ξ_1, b), tj. $a < \xi < \xi_1$ ili $\xi_1 < \xi < b$. Ako nas i ovaj rezultat svojom tačnošću ne zadovoljava postupak treba ponoviti. Ponavljanjem ovog postupka interval u kome se nalazi rešenje ξ biće manji a samim tim i tačnost rešenja veća.

Metoda ponavljanja izračunavanja, pri kojoj svako dalje izračunavanje iskorišćava rezultat prethodnog, u matematici se zove *metoda uzastopnih aproksimacija*, ili metoda iteracije u slučaju ponavljanja istog postupka.

Kod izložene metode (možemo je nazvati metoda *regula falsi*) karakteristično je to da se luk krive zamenjuje odgovarajućom sečicom, prema tome i presečna tačka luka krive presečnom tačkom sečice. Ukoliko je razlika apscisa krajnjih tačaka luka manja utoliko je sečica kraća a presečne tačke luka i odgovarajuće sečice sa OX osom bliže.

C) Pokazaćemo na dva primera kako se ova metoda primenjuje.

Primer 1. Rešiti jednačinu $x^2 - \sin x = 0$. Rešenja ove jednačine su apscise presečnih tačaka krivih $y = x^2$ i $y = \sin x$ (slika 2). Kao što se sa slike vidi ova jednačina ima dva rešenja: jedno rešenje je $x_1 = 0$, a drugo rešenje x se nalazi između 0,8 i 1, tj. $0{,}8 < x < 1$. Primenom metode regula falsi možemo granice intervala, u kome se nalazi x_2 suziti. Odredimo na pr. x_2 sa tačnošću od 10^{-2}.



Sl. 2

$$f(x) = x^2 - \sin x$$

$$f(0{,}8) = 0{,}8^2 - \sin 0{,}8^* = -0{,}07 < 0,$$

$$f(1) = 1^2 - \sin 1 = 0{,}16 > 0.$$

Pošto su $f(0{,}8)$ i $f(1)$ različitog znaka to se rešenje x_2 zaista nalazi između 0,8 i 1. Pomoću formule (2) možemo sada naći približno rešenje ξ_1:

$$\xi_1 = \frac{0{,}8 \cdot f(1) - 1 \cdot f(0{,}8)}{f(1) - f(0{,}8)} \approx 0{,}86$$

Pošto je

$$f(0{,}86) = 0{,}86^2 - \sin 0{,}86 = -0{,}0182 < 0,$$

to se rešenje x_2 nalazi između 0,86 i 1, dakle $0{,}86 < x_2 < 1$. Kako je pak $f[(0{,}86 + 1)/2] = f(0{,}93) = 0{,}93^2 - \sin 0{,}93 = 0{,}0633 > 0$, to je $0{,}86 < x_2 < 0{,}93$. Primenimo li ponovo formulu (2) dobićemo;

$$\xi_2 = \frac{0{,}86 \cdot f(0{,}93) - 0{,}93 \cdot f(0{,}86)}{f(0{,}93) - f(0{,}86)} \approx 0{,}87$$

Kako je $f(0{,}87) = -00074 < 0$, to je $0{,}87 < x_2 < 0{,}93$. Pošto je pak

$$f[(0{,}87 + 0{,}93)/2] = f(0{,}90) = 0{,}0267 > 0, \text{ to je } 0{,}87 < x_2 < 0{,}90.$$

Nađemo li sada i $f[(0{,}87 + 0{,}90)/2] = f(0{,}88) = 0{,}0037 > 0$, zaključujemo da je $0{,}87 < x_2 < 0{,}88$. Dakle, sada je rešenje x_2 određeno sa tačnošću od $0{,}01 = 10^{-2}$ kao što smo i želili. Povećanje tačnosti rešenja se ovim putem može nastaviti prema potrebi. Na primer, u ovom slučaju dalje bi bilo:

$$\xi_3 = \frac{0{,}87 \cdot f(0{,}88) - 0{,}88 \cdot f(0{,}87)}{f(0{,}88) - f(0{,}87)} \approx 0{,}8738, \text{ itd.}$$

Primer 2. Rešiti jednačinu $f(x) = x^3 - 2x - 5 = x^3 - (2x + 5) = 0$. Rešenja ove jednačine su apscise presečnih tačaka krivih $y = x^3$ i $y = 2x + 5$. Sa slike 3 vidimo da je traženo rešenje $x \approx 2$. Ako izračunamo $f(2)$ i $f(2{,}1)$ videćemo da je $f(2) = -1 < 0$, a $f(2{,}1) = 0{,}061 > 0$, dakle $2 < x < 2{,}1$. Na osnovu formule (2) biće dalje:

$$\xi_1 = \frac{2 \cdot f(2{,}1) - 2{,}1 \cdot f(2)}{f(2{,}1) - f(2)} \approx 2{,}0943.$$

---

* Za određivanje vrednosti trigonometrijskih funkcija apstraktnog argumenta čitaoc se može poslužiti Tablicom goniometrijskih funkcija ugla u radijanima, koja se nalazi na str 170-171 u Numer. i log. tabl. V. Miškovića.

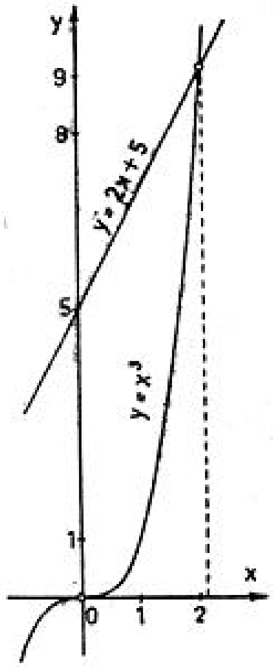
Kako je $f(\xi_1) = f(2{,}0943) = -0{,}0028 < 0$ to je $2{,}0943 < x < 2{,}1$. Dalje je

$$\xi_2 = \frac{2{,}0943 \cdot f(2{,}1) - 2{,}1 \cdot f(2{,}0943)}{f(2{,}1) - f(2{,}0943)}.$$

S obzirom da je $f(\xi_2) = f(2{,}0946) = 0{,}00054 > 0$, to je $2{,}0943 < x < 2{,}0946$, pa je dalje:

$$\xi_3 = \frac{2{,}0943 \cdot f(2{,}0946) - 2{,}0946 \cdot f(2{,}0943)}{f(2{,}0946) - f(2{,}0943)} \approx 2{,}09455.$$

Sa ovom vrednošću možemo biti zadovoljni, pa kao približnu vrednost traženog rešenja uzeti $x = 2{,}09455$.



Sl. 3

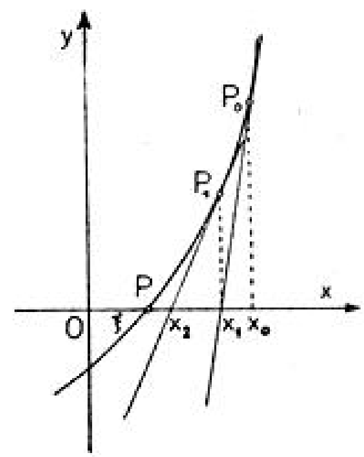
D) Pored metode regula falsi, kod koje se luk krive zamenjuje odgovarajućom sečicom, za povećanje tačnosti rešenja jednačina nađenih grafičkim putem upotrebljava se i takozvana *Njutnova metoda* kod koje se luk krive zamenjuje tangentom.

Pretpostavimo da treba rešiti jednačinu $f(x = 0)$. Kao i kod prethodne metode najprije bismo konstruisali grafik funkcije $y = f(x)$. Neka je zajednička tačka grafika i OX ose $P(\xi, 0)$. Uočimo tačku $P_0[x_0, f(x_0)]$ u blizini tačke P, povucimo u njoj tangentu i odredimo apscisu x_1 njene presečne tačke sa OX osom (slika 4). Jednačina tangente u tački P_0 je

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

dakle je za $y = 0$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad (4)$$



Sl. 4

Formula (4) daje približnu vrednost rešenja ξ. Sada bismo u tački $P_1[x_1, f(x_1)]$ povukli tangentu pa na isti način našli apcisu x_2 njene presečne tačke sa OX osom, itd. Na ovaj način dobijali bismo sve približnije vrednosti x_k traženog rešenja ξ.

E) Neka čitalac primeni metodu regula falsi na ovim primerima:

1. $\sin x - 1/x = 0$; 2. $\cos x = 5x$; 3. $\log x - \sin x = 0$; 4. $x^3 - x - 2 = 0$.