др Јудита Цофман (Ерланген)

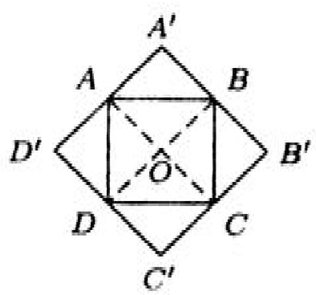
КЕПЛЕРОВ РОМБИЧНИ ДОДЕКАЕДАР И УДВОСТРУЧЕЊЕ КОЦКЕ

1. Један задатак у простору.

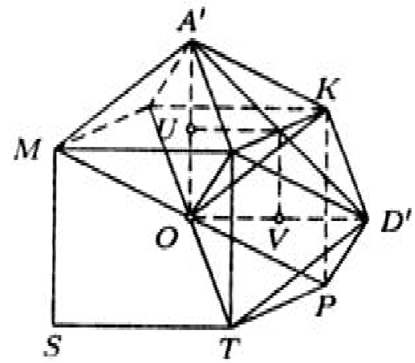
Слика 1 приказује квадрат $ABCD$ са центром O. Спајањем тачке O са тачкама A, B, C и D квадрат $ABCD$ је подељен на четири троугла са основицама AB, BC, CD и DA и заједничким врхом O. За сваки од ових троуглова конструисана је њему симетрична слика у односу на основицу троугла; то су троуглови ABA', ACB', CDC' и DAD' (слика 1). У чланку *Један задатак о квадрату са уопштењима* објављеном у МЛ XXXVI 1, доказали смо да је геометријска фигура, коју чине троуглови ABA', BCB', CDC' и DAD' заједно са квадратом $ABCD$ такође квадрат, са теменима A', B', C', D'. Површина квадрата $A'B'C'D'$ је два пута већа од површине квадрата $ABCD$.

Сада ћемо се позабавити покушајем да горња разматрања уопштимо у простору.

Задатак. Нека је дата коцка $KLMNPRST$ са средиштем O. Спајањем тачке O са теменима коцке, коцка се разлаже на шест пирамида са заједничким врхом O, чије су основе стране коцке: $KLMN, LMSR, STPR, TPKN, NMST$ и $KLRP$. За сваку од ових пирамида конструишите њој симетричну слику у односу на основу пирамиде; то су пирамиде $A'KLMN, B'LMSR, C'STPR, D'TPKN, E'NMST$ и $F'KLRP$. Испитајте какве особине има тело $\mathcal{T}$ које чине ове пирамиде заједно са коцком $KLMNPRST$.



Сл. 1



Сл. 2

Решење овог задатка је отежано тиме што није лако замислити ово тело. На слици 2 је представљена коцка $KLMNPRST$ и пирамиде $A'KLMN$ и $D'TPKN$. Како се у темену A' сустичу четири ивице, а у сваком темену коцке се сустичу три ивице, то тело $\mathcal{T}$ не може бити коцка.

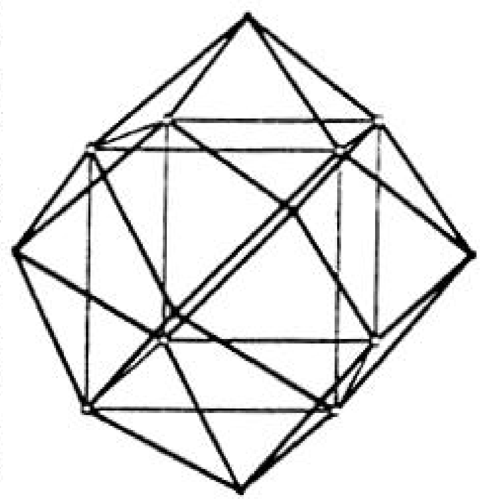
Троуглови $A'MN$, $A'NK$; $A'KL$, $A'LM$, $D'NT$, $D'TP$, $D'PK$, и $D'KN$ пирамида $A'KLMN$ и $D'TPKN$, припадају телу $\mathcal{T}$. Од тих троуглова два троугла: $A'NK$ и $D'KN$ имају заједничку страницу NK, која је ивица коцке $KLMNPRST$. Докажимо да ови троуглови припадају истој равни и да су A', N, D' и K темена ромба чија је једна дијагонала NK.

Нека је Q средиште дужи NK и нека су U и V средишта квадрата $KLMN$ и $TPKN$. Тачке A', O, D', U, Q и V су једнако удаљене од крајева дужи NK, па ових шест тачака припада симетралној равни дужи NK; дакле припада истој равни. Према томе, и углови $\sphericalangle A'QU$, $\sphericalangle UQV$ и $\sphericalangle D'QV$ припадају тој равни. Како је троугао $A'QU$ једнакокрако-правоугли (докажите), то је $\sphericalangle A'QU = 45°$. Такође, како је и троугао $D'QV$ једнакокрако-правоугли, то је $\sphericalangle D'QV = 45°$. Како је $QUOV$ квадрат, то је $\sphericalangle UQV = 90°$. Према томе, збир углова $\sphericalangle A'QU$, $\sphericalangle UQV$ и $\sphericalangle D'QV$ је $180°$, па тачка Q припада дужи $A'D'$. Како се дужи $A'D'$ и NK секу у тачки Q, оне припадају истој равни.

Тиме смо доказали да су A', N, D' и K темена једног четвороугла у једној равни, чије су све странице једнаке, па је $A'ND'K$ ромб.

Сада нам преостаје да размислимо:

Тело $\mathcal{T}$ се добија тако да се на стране коцке $KLMNPRST$ причврсте четворостране пирамиде, подударне са пирамидом $OKLMN$. Таквих пирамида има укупно 6. Свака од њих има 4 троугаоне стране, које чине делове површи тела $\mathcal{T}$. Површ тела $\mathcal{T}$ се састоји од $6 \cdot 4 = 24$ троугла. Као што смо претходно доказали, по два од ових троуглова имају заједничку основицу, која представља управо једну од коцкиних ивица; таква два троугла чине заједнички један ромб. Коцка има 12 ивица, дуж сваке ивице коцке сусрећу се два од 24 троугаоних страна пирамида причвршћених на површину коцке. То значи да су те 24 троугаоне стране пирамида подељене на 12 парова; троуглови сваког пара чине по један ромб.



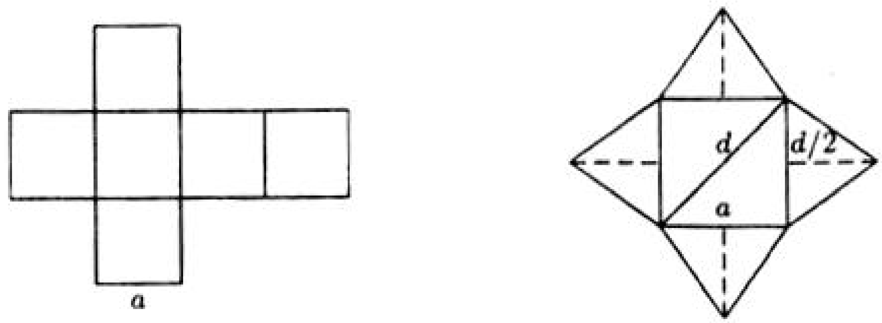
Сл. 3

Одавде изводимо закључак:

Тело $\mathcal{T}$ је ограничено са 12 страна. Дванаест се на Грчком каже „додека", а стране тела $\mathcal{T}$ су ромбови, па се ово тело зове **ромбични додекаедар**.

Читаоцима препоручујемо да направе модел ромбичног додекаедра. То се може урадити на следећи начин.

Прво направите модел коцке. Нека је дужина ивице коцке $20\,cm$. Затим направите мрежу четворостране пирамиде чија је основа квадрат странице $20\,cm$. Остале стране пирамиде су једнакокраки троуглови са висином која је једнака половини дијагонале основе (објаснити). Од ове мреже саставите пирамиду и залепите је на једну од коцкиних страна.



Сл. 4

На исти начин направите још пет пирамида и залепите их на преостале стране коцке. Мрежа коцке и једне од пирамида приказане су на слици 4.

2. Занимљивости из историје ромбичног додекаедра.

Ромбични додекаедар је откривен око 1611 године. Открио га је чувени немачки астроном Кеплер, који је живео од 1571. до 1630. године. Кеплер је приметио следећу интересантну особину ромбичног додекаедра. Копије овог тела исте величине могу се прилепити једна уз другу, да чине „мозаик у простору". Ромбични додекаедри у таквом мозаику су тесно наслоњени један на други, испуњавајући део простора без пукотина у читавој конструкцији.

Кеплер је био у стању да измери углове ромбова код ромбичног додекаедра. Оштри углови су приближно $70^\circ\ 32'$.

У природи се ромбични додекаедар јавља као гранични кристал, често тако велики, као људска песница.

На крају, покушајте да решите сами следећи задатак:

По ивицама једног ромбичног додекаедра креће се мрав. Мрав има намеру да, полазећи из једног темена, на свом путу по неким ивицама тела сврати у свако теме тачно једанпут и да се на крају врати у полазно теме. Да ли ће мрав моћи да спроведе своју намеру?

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија