XLIII олимпијада

1. Нека n е природен број и T е множество точки (x, y) во рамнината такви што x и y се ненегативни цели броеви и $x+y<n$. Секоја точка на множеството T е обоена црвено или сино. Ако точката (x, y) е обоена црвено, такви се и сите точки (x', y') на множеството T за кои истовремено важи $x' \le x$ и $y' \le y$. Множеството од n сини точки се нарекува X – *множество* ако сите точки имаат различни x-координати, а множеството од n сини точки се нарекува Y – множество ако сите точки имаат различнње y-координати. Докажи дека бројот на X – множествата е еднаков на бројот на Y -множествата.

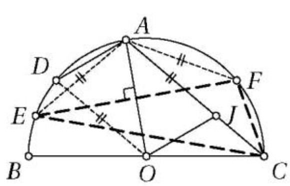
Решение. Нека a_i е бројот на сини точки на правата $x=i$, а b_i е бројот на сини точки на правата $y=i$. Треба да докажеме дека $a_0a_1...a_{n-1}=b_0b_1...b_{n-1}$. Всушност ќе докажеме дека низата $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ е пермутација на низата $b_0, b_1, ..., b_{n-1}$.

Тврдењето ќе го докажеме со индукција по бројот на црвените точки. Основата на индукцијата (кога сите точки се сини) е тривијална. Сега да воочиме црвена точка (x, y) со најголем збир $x+y$. Тогаш $a_x=b_y=n-x-y-1$. Ако оваа точка ја пребоиме во сино, тогаш a_x и b_y ќе се намалат за 1. Според индуктивната претпоставка $a_0, ..., a_x-1, ..., a_{n-1}$ е пермутација на $b_0, ..., b_x-1, ..., b_{n-1}$ и индуктивниот чекор одма следува.

2. Нека BC е дијаметар на кружница k со центар O, A е точка од k таква што $0^\circ < \measuredangle AOB < 120^\circ$, а D е средината на лакот AB на кружницата k кој не ја содржи точката C. Нека правата која минува низ O и е паралелна со DA ја сече правата AC во точката J, а симетралата на отсечката OA ја сече кружницата k во точките E и F. Докажи, дека J е центар на вписаната кружница во триаголникот CEF.

Решение. Од

$$\measuredangle BCA = \frac{1}{2}\measuredangle BOA = \measuredangle BOD$$



следува дека правите CA и OD се паралелни. По услов $AD \parallel OJ$, па затоа четириаголникот $JADO$ е паралелограм. Оттука следува дека

$$\overline{AJ}=\overline{OD}=\overline{OE}=\overline{AE}=\overline{AF},$$

па затоа

$$\measuredangle JFE = \measuredangle JFA - \measuredangle EFA = \measuredangle AJF - \measuredangle ECA = \measuredangle AJF - \measuredangle ACF = \measuredangle CFJ .$$

Последното значи дека FJ е симетрала на $\measuredangle EFC$. Сега од $\overline{AE}=\overline{AF}$ следува дека CJ е симетрала на $\measuredangle ECF$, па затоа J е центар на впишаната кружница во триаголникот CEF.

3. Определи ги сите парови природни броеви (m,n), $m,n \geq 3$ такви што

$$\frac{a^m+a-1}{a^n+a^2-1}$$

е природен број за бесконечно многу природни броеви a.

Решение. Нека $R(x)$ е остатокот при делењето на полиномот $F(x)=$ x^m+x-1 со полиномот $G(x)=x^n+x^2-1$. Тогаш за бесконечно многу x, треба $R(x)$ да е делив со $G(x)$ и како $\deg R<\deg G$, за секој доволно голем $|x|$ ќе важи $|R(x)|<|G(x)|$, па затоа мора да важи $R(x)=0$. Значи, $R \equiv 0$, т.е. полиномот $F(x)$ е делив со полиномот $G(x)$.

Полиномот

$$H(x)=x^{m-n}G(x)-F(x)=x^{m-n+2}-x^{m-n}-x+1$$

е делив со $G(x)$ и очигледно $\frac{H(x)}{G(x)}$ не е константа, па затоа $\deg H \geq \deg G+1$, т.е. $m \geq 2n-1$.

Од друга страна, бидејќи $G(0)=-1$ и $G(1)=1$ добиваме дека полиномот $G(x)$ има барем една нула $\alpha \in (0,1)$. Тогаш важи $F(\alpha)=0$, т.е.

$$\alpha^m+\alpha=\alpha^n+\alpha=1.$$

Ако $m \geq 2n$, тогаш

$$1-\alpha=\alpha^m \leq (\alpha^n)^2=(1-\alpha^2)^2,$$

што е еквивалентно со

$$\alpha(1-\alpha)(\alpha^2+\alpha-1) \leq 0,$$

но тоа не е можно бидејќи

$$\alpha^2+\alpha-1>\alpha^m+\alpha-1=0.$$

Значи, $m=2n-1$. Според тоа, за некој $a \in \mathbb{Z}$ имаме

$$H(x)=(x-a)G(x)=x^{n+1}-ax^n+x^3-ax^2-x+a.$$

Сега лесно се добива дека $a=1$ и $(n,m)=(3,5)$.

4. Нека $n>1$ е природен број и нека $d_1,d_2,\ldots,d_k$ се сите позитивни делители на бројот n, при што

$$1=d_1<d_2<\ldots<d_k=n.$$

Нека $D=\sum_{i=1}^{k-1} d_i d_{i+1}$.

а) Докажи, дека $D<n^2$.

б) Определи ги сите броеви n за кои D е делител на n^2.

Решение. а) Јасно, $n = d_i d_{k+1-i}$, т.е. $\frac{d_i}{n} = \frac{1}{d_{k+1-i}}$, па затоа

$$\frac{D}{n^2} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{d_i d_{i+1}}{n^2} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{d_{k+1-i} d_{k-i}} \le \sum_{i=1}^{k-1} \frac{d_{k+1-i} - d_{k-i}}{d_{k+1-i} d_{k-i}}$$
$$= \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{1}{d_{k-i}} - \frac{1}{d_{k+1-i}}\right) = \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_k} = 1 - \frac{1}{n} < 1,$$

што значи дека $D < n^2$.

б) Од решението под а) имаме

$$1 > \frac{D}{n^2} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{d_{k+1-i} d_{k-i}} \ge \frac{1}{d_1 d_2} = \frac{1}{d_2},$$

па затоа $d_1 = 1 < \frac{n^2}{D} \le d_2$. Според тоа, ако D е делител на n^2, тогаш мора да важи $\frac{n^2}{D} = d_2$, па затоа $k = 2$. Значи, природниот број $n > 1$ има точно два позитивни делител, односно n е прост број.

5. Определи ги сите функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такви што важи

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz), \qquad (1)$$

за секои $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

Решение. Ако во (1) ставиме $x = z = 0$ и $y = t$ добиваме $4f(0)f(y) = 2f(0)$. Ако $f(0) \ne 0$, тогаш $f(y) = \frac{1}{2}$, за секој $y \in \mathbb{R}$.

Нека $f(0) = 0$. Ако во (1) ставиме $z = t = 0$ добиваме

$$f(xy) = f(x)f(y), \text{ за секои } x, y \in \mathbb{R}. \qquad (2)$$

Ако $f(y) = 0$ за некој $y \ne 0$, добиваме дека $f(x) = 0$, за секој $x \in \mathbb{R}$. Затоа нека $f(y) \ne 0$ за секој $y \ne 0$. Да забележиме дека од (2) следува дека $f(x) = f(\sqrt{x})^2 > 0$ за секој $x > 0$, па од (1) за $t = x$ и $z = y$ следува

$$f(x^2 + y^2) = (f(x) + f(y))^2 \ge f(x^2),$$

за секои $x, y \ge 0$. Според тоа, функцијата f строго монотоно расте на $\mathbb{R}^+$.

Од (2) следува дека $f(1) = 1$. Понатаму, ако во (1) земеме $t = y$, тогаш од (2) по скратувањето со $f(y)$ добиваме

$$2(f(x) + f(z)) = f(x - z) + f(x + z), \text{ за секои } x, z \in \mathbb{R}. \qquad (3)$$

Сега ако во (3) земеме $x = 0$ добиваме $f(z) = f(-z)$. Понатаму, користејќи ја (3) со индукција лесно се докажува дека $f(nx) = n^2 f(x)$ за секој $n \in \mathbb{N}$, а оттука следува дека $f(\frac{m}{n}) = \frac{1}{n^2} f(m) = (\frac{m}{n})^2$ за секој рационален број $\frac{m}{n}$.

Конечно, бидејќи функцијата f монотоно расте за $x>0$ мора да важи $f(x)=x^2$ за секој $x\in\mathbb{R}$.

Лесно се проверува дека функциите $f(x)=0,\ f(x)=\frac{1}{2},\ f(x)=x^2$ навистина се решенија на равенката (1).

6. Нека $k_1,k_2,...,k_n,(n\geq 3)$ се кружници со радиуси еднакви на 1 и центри $O_1,O_2,...,O_n$, соодветно. Докажи дека ако ниту една права нема заеднички точки со повеќе од две од дадените кружници, тогаш

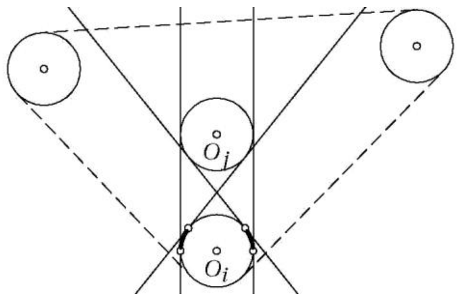
$$\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{1}{O_iO_j}\leq\frac{(n-1)\pi}{4}.$$

Решение. Јасно,

$$\frac{2}{O_iO_j}=\sin\alpha_{ij}<\alpha_{ij},$$

каде $2\alpha_{ij}$ е аголот меѓу внатрешните заеднички тангенти на кружниците k_i и k_j. Затоа доволно е да докажеме дека

$$\sum_{i\neq j}\alpha_{ij}\leq(n-1)\pi.$$



За произволни $1\leq i,j\leq n,(i\neq j)$ да го разгледаме множеството k_{ij} од сите точки на кружницата k_i во кои тангентата на k_i ја сече или ја допира кружницата k_j. Множеството k_{ij} се состои од два лака со централен агол α_{ij}. Според условот на задачата множествата k_{ij} $(1\leq i,j\leq n)$ се заемно дисјунктни, па затоа важи $2\sum_{i\neq j}\alpha_{ij}\leq 2n\pi$.

Нека K е конвексната обвивка на кружниците $k_1,k_2,...,k_n$. Нејзината граница се состои од неколку отсечки и од лаци на кружници со вкупен збир на должини 2π. Овие лаци се дисјунктни со сите множества k_{ij}, па така всушност важи $2\sum_{i\neq j}\alpha_{ij}\leq 2(n-1)\pi$, со што доказот е завршен.