Комбинаторна теорија бројева

прва-5.1 верзија: 28.3.2016.

Душан Ђукић

1. Дат је 25-цифрен број без деветки у децималном запису. Доказати да можемо да увећамо две његове једнаке цифре за 1 тако да добијемо број који није дељив са 7.

2. Скуп M се састоји од 1985 различитих простих бројева, од којих ниједан нема прост делилац већи од 26. Доказати да се из скупа M могу изабрати четири различита броја чији је производ четврти степен.

3. Подскуп M скупа $\{1, 2, 3, \dots, 15\}$ је такав да производ никоја три различита елемента M није квадрат. Колико највише елемената може имати M?

4. Колико највише природних бројева се може изабрати из скупа $\{105, 106, \dots, 210\}$ тако да су свака два узајамно проста?

5. Дато је 8-елементни подскуп A скупа $\{1, 2, \dots, 17\}$. Доказати да постоји $k > 0$ такво да једначина $x - y = k$ има бар три решења у A.

6. Дати су цели бројеви $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{101} < 5050$. Доказати да постоје различити a_i, a_j, a_k, a_l такви да $5050 \mid a_i + a_j - a_k - a_l$.

7. Дат је 101-елементни подскуп A скупа $S = \{1, 2, \dots, 1\,000\,000\}$. Доказати да постоје бројеви $t_1, t_2, \dots, t_{100}$ из S такви да су скупови $A_j = \{x + t_j \mid x \in A\}$ за $j = 1, 2, \dots, 100$ међусобно дисјунктни.

8. У подскупу S скупа $\{1, 2, \dots, 2011\}$, никоја два елемента се не разликују за 4 или 7. Колико највише елемената може имати скуп S?

9. Доказати да се бројеви $1, 2, \dots, 2013$ не могу распоредити по кругу тако да за свака два суседна броја x, y важи $503 \leqslant |x - y| \leqslant 1005$.

10. Доказати да се сви природни бројеви могу распоредити у 100 непразних скупова тако да не постоје три броја a, b, c из три различита подскупа за које је $a + 99b = c$.

11. Нека је n природан број. Скуп $\{1, 2, \dots, 3n\}$ је подељен на 3 (дисјунктна) n-елементна скупа A, B, C. Да ли је увек могуће изабрати бројеве x, y, z, по један из сваког скупа, тако да је $x + y = z$?

12. Да ли постоји природан број $n > 1$ са следећим својством: скуп $\mathbb{N}$ може да се разложи на n непразних подскупова тако да збир ма којих $n - 1$ бројева из $n - 1$ различитих подскупова увек припада преосталом подскупу?

13. Одредити најмањи број n подскупова на које је могуће разложити скуп $M = \{1, 2, \dots, 40\}$, тако да ниједан подскуп не садржи три (не обавезно различита) елемента a, b, c за које је $a = b + c$.

14. Дат је скуп S са n различитих реалних бројева. За природан број $k \leqslant n$, посматрајмо збирове облика $x_1 + x_2 + \cdots + x_k$, где су $x_1, x_2, \dots, x_k$ различити елементи S. Доказати да T садржи бар $k(n - k) + 1$ различитих елемената.

15. Дато је 2000 целих бројева $-1000 \leqslant a_1, a_2, \dots, a_{2000} \leqslant 1000$ са збиром 1. Доказати да међу њима постоји неколико (бар један) са збиром 0.

16. Нека је $p \geqslant 3$ прост број и $a_1, a_2, \dots, a_{p-2}$ природни бројеви такви да $p \nmid a_k(a_k^k - 1)$ за све k. Доказати да се међу овим бројевима може одабрати неколико тако да је њихов производ конгруентан са 2 по модулу p.

17. Нека је p прост број и $k \leqslant p$. Дат је скуп $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{2k-1}\}$ природних бројева, међу којима никојих k не дају исти остатак по модулу p. Доказати да се међу збировима по k од ових бројева по модулу p појављује бар k различитих.

18. Ако је p природан број, доказати да међу $2p-1$ целих бројева постоји p чији је збир дељив са p.

19. *(Ердош-Гинзбург-Зивова теорема)* Ако је n природан број, доказати да међу $2n-1$ целих бројева постоји n чији је збир дељив са n.

20. Низ природних бројева (x_i) задовољава $x_1 = 1$ и $x_n < x_{n+1} \leqslant 2n$ за све n. Доказати да за сваки природан број k постоје индекси r, s за које је $x_r - x_s = k$.

21. Дато је k природних бројева $a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leqslant n$, где је $k > [\frac{n+1}{2}]$. Доказати да постоје индекси p, q за које је $a_p + a_1 = a_q$.

22. Природни бројеви $a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leqslant n$ су такви да ниједан не дели производ осталих. Доказати да је $k \leqslant \pi(n)$, где $\pi(n)$ представља број простих бројева не већих од n.

23. Доказати да међу било којих $n+1$ природних бројева не већих од $2n$ постоје два таква да је један од њих дељив другим.

24. Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_k \leqslant n$ природни бројеви такви да је $[a_i, a_j] > n$ за све различите i, j. Доказати да је $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} < \frac{3}{2}$.

25. Нека су $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < 2n$ природни бројеви, од којих ниједан није дељив неким другим. Ако је $3^k < 2n < 3^{k+1}$, доказати да је $a_1 \geqslant 2^k$.

26. Дат је природан број $n > 1$. Одредити највеће m за које је могуће изабрати n бројева из скупа $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ тако да је НЗС свака два већи или једнак m.

27. Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_k$ различити природни бројеви такви да је $[a_i, a_j] \leqslant n$ за свака два индекса i, j. Доказати да је $k \leqslant 2[\sqrt{n}]$.

28. Да ли постоји константа $c > 1$ тако да за свако довољно велико n постоје различити природни бројеви $a_1, \ldots, a_k$, $k \geqslant c\sqrt{n}$, такви да је $[a_i, a_j] \leqslant n$ за све i, j?

29. Нека је $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ скуп од n природних бројева такав да су збирови елемената по свим подскуповима скупа A различити. Доказати да је $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 2$.

30. Низ природних бројева $a_1, a_2, \ldots$ задовољава услов $0 < a_{n+1} - a_n \leqslant 100$ за свако n. Доказати да постоје различити индекси p, q такви да $a_p \mid a_q$.

Решења

1. Претпоставимо супротно. Означимо дати број са $n = \overline{a_{24}a_{23}\dots a_1a_0}$. Ако је $a_i = a_j = a_k$ за неке различите i, j, k, онда је $10^i + 10^j \equiv 10^i + 10^k \equiv 10^j + 10^k \equiv -n \pmod 7$, одакле је $10^i \equiv 10^j \equiv 10^k \equiv -\frac{n}{2} \pmod 7$. Како је низ $1, 10, 10^2, \dots, 10^{24}$ периодичан са периодом 6, у њему се сваки остатак по модулу 7 (па тако и $-\frac{n}{2}$) појављује највише пет пута. Следи да се највише једна цифра може појавити више од двапут, а ни она не може више од пет пута. Али тада n може да има највише $8 \cdot 2 + 5 = 21$ цифара, контрадикција.

2. Простих бројева не већих од 26 има 9. Нека су $x_n = 2^{a_{n1}}3^{a_{n2}}\cdots 23^{a_{n9}}$, $n = 1, \dots, 1985$, елементи скупа M. Производ x_mx_n је квадрат ако и само ако је $a_{mi} \equiv a_{ni} \pmod 2$ за $i = 1, \dots, 9$. Како могућих деветорки $(a_{n1}, \dots, a_{n9})$ има 512, један по један можемо изабрати $736 = [\frac{1985-512}{2}]$ дисјунктних парова елемената из M чији су производи квадрати. На исти начин закључујемо да међу тих 736 квадрата постоје два чији је производ четврти степен.

3. У сваком од дисјунктних подскупова $\{1, 4, 9\}$, $\{2, 6, 12\}$, $\{3, 5, 15\}$ и $\{7, 8, 14\}$ производ елемената је квадрат. Зато је $|M| \leqslant 11$. Претпоставимо да је $|M| = 11$. Тада $10 \in M$ и ниједан од дисјунктних скупова $\{1, 4, 9\}, \{2, 5\}, \{6, 15\}, \{7, 8, 14\}$ није подскуп M. Следи да је $\{3, 12\} \subset M$, па ниједан од $\{1\}, \{4\}, \{9\}, \{2, 6\}, \{5, 15\}$ и $\{7, 8, 14\}$ није подскуп M: одатле је $|M| \leqslant 9$, контрадикција. Према томе, $|M| \leqslant 10$. Овај број се достиже за $M = \{1, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14\}$.

4. Дати скуп садржи 19 простих бројева. Претпоставимо да смо одабрали 7 сложених. Само један сложен број из датог скупа није дељив ни са једним од бројева $2, 3, 5, 7, 11$ (то је број $13^2 = 169$), што значи да је најмањи прост делилац исти за бар два од тих бројева. Закључујемо да је међу одабраним бројевима највише 6 сложених, што укупно даје 25 изабраних бројева. Пример је скуп простих бројева из датог скупа заједно са бројевима $2^7, 5^3, 11^2, 13^2, 3 \cdot 37, 7 \cdot 17$.

5. Нека је $a_1 < a_2 < \cdots < a_8$. Посматрајмо разлике $a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_8 - a_7$ и $a_3 - a_1, a_4 - a_2, \dots, a_8 - a_6$. Њихов збир је $2a_8 + a_7 - a_2 - 2a_1 \leqslant 46$. С друге стране, ако се ниједна од ових 13 разлика не појављује трипут, онда је њихов збир најмање $2(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) + 7 = 49$, контрадикција.

6. Посматрајмо све збирове облика $a_i + a_j$, $i < j$. Тих збирова има 5050, па ако су нека два једнака по модулу 5050, завршили смо; у супротном су сви ови збирови различити по модулу 5050, па је њихов збир конгруентан $0 + 1 + 2 + \cdots + 5049 \pmod{5050}$ што је непарно. С друге стране, збир ових збирива је једнак $100(a_1 + a_2 + \cdots + a_{101})$, дакле паран, што је контрадикција.

7. Посматрајмо скуп $D = \{x - y \mid x, y \in A\}$. Његова кардиналност није већа од $101 \cdot 100 + 1$. Скупови $A + t_i$ и $A + t_j$ су дисјунктни ако и само ако $t_i - t_j \notin D$.

   Одабраћемо индуктивно 100 елемената $t_1, \dots, t_{100}$. Елемент t_1 бирамо произвољно из скупа $S \setminus D$ (он постоји јер је $|S| > |D|$). Претпоставимо да смо одабрали елементе $t_1, \dots, t_k \in S$ $(k \leqslant 99)$ тако да разлика никоја два није у скупу D. За t_{k+1} можемо узети било који елемент скупа S који не припада унији скупова $t_1 + D, t_2 + D, \dots, t_k + D$ (такав елемент постоји јер та унија има највише $k(101 \cdot 100 + 1) \leqslant 999999$ елемената).

8. Међу 11 узастопних елемената $x, x + 1, \dots, x + 10$ скупа $\{1, \dots, 2011\}$, највише 5 је у S. Заиста, у супротном нека два узастопна од елемената $x, x + 4, x + 8, x + 1, x + 5, x + 9, x + 2, x + 6, x + 10, x + 3, x + 7, x$ леже у S, што је немогуће.

   Због $2011 = 11 \cdot 183 - 2$ следи да је $|S| \leqslant 5 \cdot 183 = 915$. Овај број се достиже ако се узме $S = \{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 2011, x \equiv 1, 3, 4, 6, 9 \pmod{11}\}$.

9. Претпоставимо да је могуће. Поделимо бројеве на два скупа: $A = \{504, 505, \ldots, 1510\}$ и $B = \{1, 2, \ldots, 503, 1511, 1512, \ldots, 2013\}$. Два елемента скупа B не могу бити суседна. Осим тога, бројеви 504 и 1510, који леже у A, нису суседни и имају бар по једног суседа из A. Следи да је $1007 = |A| \geqslant |B| + 2 = 1008$, контрадикција.

10. Ако је $a + 99b = c$, онда бар два од бројева a, b, c имају исти степен двојке у канонској факторизацији. Сада у i-ти подскуп ставимо све бројеве облика $2^n a$, где $2 \nmid a$ и $n \equiv i \pmod{100}$.

11. Претпоставимо супротно. Нека без смањења општости $1, 2, \ldots, k-1 \in A$ и $k \in B$. Посматрајмо неки елемент $x \in C$. Број $x - 1$ ($x \geqslant 3$ јер $2 \notin C$) очигледно није у B; претпоставимо да је $x - 1 \in C$. Тада елемент $x - k$ није у A због $(x - k) + k = x$, и није у B због $x - k + (k - 1) = x - 1$. Слично, $x - k - 1$ није у A нити у B због $(x-k-1)+k = (x-1)$ и $(x-k-1)+1 = (x-k)$. Следи $x-k-1, x-k \in C$. Индукцијом добијамо $x - ik - 1, x - ik \in C$ за све дозвољене $i = 0, 1, \ldots$, што није тачно за нпр. $i = [\frac{x-1}{n}]$ јер је тада $x - ik \in \{1, \ldots, k\}$.

   Овим смо показали да из $x \in C$ следи $x - 1 \in A$. То значи да је $C = \{y + 1 \mid y \in A\}$, али то не важи јер је $1 \in A$ и $2 \in B$. Ова контрадикција завршава доказ.

12. Претпоставимо да такво n постоји. Очигледно је $n \geqslant 3$. Посматрајмо различите елементе $a, b \in A_1$ и цео број $c > \max(-a, -b)$. Показаћемо да $a + c$ и $b + c$ леже у истом подскупу. Претпоставимо да нпр. $a + c \in A_1$ и $b + c \in A_3$, и посматрајмо произвољне елементе $x_i \in A_i$, $i = 3, \ldots, n$. Како су $a + x_3 + \cdots + x_n, b + x_3 + \cdots + x_n \in A_2$, збир $s = (a + c) + (b + x_3 + \cdots + x_n) + x_4 + \cdots + x_n = (a + x_3 + \cdots + x_n) + (b + c) + x_4 + \cdots + x_n$ с једне стране лежи у A_3, а с друге у A_1, контрадикција. Слично, ако $a + c \in A_2$ и $b+c \in A_3$, онда $s = a+(b+c)+x_4+\cdots+x_n$ припада A_2, али $s = b+(a+c)+x_4+\cdots+x_n \in A_3$, опет контрадикција.

    За $i = 1, \ldots, n$ одаберимо $x_i \in A_i$ и нека је $s = x_1 + \cdots + x_n$ и $y_i = s - x_i$. Тада је $y_i \in A_i$. По претходном, $2x_i = x_i + x_i$ је у истом скупу као $x_i + y_i = s$. Следи да су сви бројеви $2x_i$, $i = 1, \ldots, n$, у истом скупу; следи да су сви парни бројеви у истом скупу, рецимо A_1. Слично, $2x_i + 1 = (x_i + 1) + x_i$ и $(x_i + 1) + y_i = s + 1$ су у истом скупу за $i = 1, \ldots, n$; тј. сви непарни бројеви већи од 1 су у истом скупу, рецимо A_2. Такође је $3 - 2 = 1 \in A_2$, али онда су $A_3, \ldots, A_n$ празни, контрадикција.

13. Претпоставимо да је могуће такво растављање на три подскупа X, Y и Z. Један од ових подскупова, рецимо X, садржи бар шест елемената: $a_1, a_2, \cdots, a_6$, међу којима је a_6 највећи. Ниједна од пет разлика $a_6 - a_1, \ldots, a_6 - a_5$ не лежи у X, па један од подскупова Y, Z, рецимо Y, садржи бар три од њих - нека су то $b_i = a_6 - a_i$, $i = 1, 2, 3$. Разлике $b_1 - b_2$, $b_2 - b_3$ и $b_1 - b_3$ нису ни у X ни у Y, па морају да леже у Z, али збир прве две је једнак трећој, контрадикција. Према томе, $n \geqslant 4$.

    Даћемо пример четири подскупа са траженим својством, не захтевајући да буду дисјунктни. За $k = 1, 2, 3, 4$, нека је $A_k = \{x \in M \mid x \equiv m \pmod{3^k}, \frac{1}{2} \cdot 3^{k-1} < m \leqslant 3^{k-1}\}$. Унија ових подскупова је цео M, а збир два елемента истог скупа A_k није у A_k: заиста, ако су a, b конгруентни неком броју у интервалу $(\frac{1}{2}3^{k-1}, 3^{k-1}] \pmod{3^k}$, онда је $a + b$ конгруентан броју у интервалу $(3^{k-1}, 2 \cdot 3^{k-1}]$.

14. За фиксирано k, тврђење доказујемо индукцијом по n. За $n = k$ тврђење је тривијално; нека је $n > k$. Нека је $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. По индуктивној претпоставци, збирова који не укључују x_n има бар $k(n - 1 - k) + 1$. Посматрајмо збирове по k од бројева $x_{n-k}, x_{n-k+1}, \ldots, x_n$. Оваквих збирова има k, а већи су од свих претходно наведених. Овако имамо укупно бар $k(n - 1 - k) + 1 + k = k(n - k) + 1$ различитих збирова.

15. Индуктивно преуредимо ове бројеве у низ $b_1, b_2, \ldots, b_{2000}$ тако да све парцијалне суме $s_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ припадају интервалу $[-999, 1000]$. Ако се међу сумама s_n појављује нула, доказ је готов. У супротном, суме s_n узимају највише 1999 различитих

вредности, па постоје две једнаке, рецимо $s_m = s_n$, $m < n$, а тада је $s_n - s_m = b_{m+1} + \dots + b_n = 0$.

16. Показујемо индукцијом по k да се међу производима по неколико од бројева $a_1, \dots, a_k$ (или ниједног: тада је производ 1) по модулу p појављује бар $k+1$ различитих.

    За $k = 1$ то је тачно: то су производи 1 и a_1, јер је $a_1 \not\equiv 1 \pmod p$ по услову задатка. Претпоставимо да је тачно за $k-1$ и означимо тих k производа са $p_1, p_2, \dots, p_k$. Како је $a_k p_1 \cdot a_k p_2 \cdots a_k p_k \not\equiv p_1 p_2 \cdots p_k \pmod p$ због $a_k^k \not\equiv 1$, бар један од производа $a_k p_i$ $(i = 1, \dots, k)$ се не појављује међу p_i-овима: нека је то $p_{k+1} = a_k p_j$. Индукција је готова.

17. Тврђење је тачно за $k = 2$. Претпоставимо да важи за $k < p$ и докажимо га за $k+1$. Нека је $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{2k+1}\}$. Можемо да претпоставимо да су $a_{2k} = b$ и a_{2k+1} два најчешћа (различита) остатка по модулу p међу овим бројевима. Скуп $A' = \{a_1, \dots, a_{2k-1}\}$ задовољава услове индукције, па се по индуктивној претпоставци међу збировима по k елемената тог скупа појављује бар k различитих по модулу p: нека су то $s_1, s_2, \dots, s_k$. Тада су $\{b + s_1, \dots, b + s_k\}$ и $\{c + s_1, \dots, c + s_k\}$ скупови од по k различитих збирова $k+1$ елемената скупа A. Довољно је показати да су ови скупови различити. Међутим, то одмах следи јер њихови збирови елемената нису исти по модулу p.

18. Ако међу датим бројевима постоји p са истим остатком по модулу p, њихов збир је дељив са p. Ако таквих p бројева не постоје, тврђење следи из претходног задатка за $k = p$.

19. За прост број $n = p$ тврђење је доказано у претходном задатку. Зато претпоставимо да је $n = m$ сложен и да је тврђење теореме тачно за $n < m$.

    Нека је $m = pr$, где је p прост број. На основу тврђења за $n = p$, међу датих $2n-1$ бројева може се (једна по једна) одабрати $2r-1$ дисјунктних p-торки са збиром дељивим са p. Међу ових $2r-1$ збирова подељених са p, по индуктивној претпоставци, неких r даје збир дељив са r. Овако смо одабрали r p-торки, тј. укупно m бројева, чији је збир дељив са $pr = m$.

20. Скуп $\{x_1, x_2, \dots, x_{k+1}\}$ је подскуп скупа $\{1, 2, \dots, 2k\}$, и у њему је бар један од парова $\{i, k+i\}$ $(i = 1, \dots, k)$ цео садржан.

21. Претпоставимо супротно. Тада свих $2k-1$ бројева $a_1, \dots, a_k$ и $a_2 - a_1, \dots, a_k - a_1$ морају бити различити, што је немогуће јер је $2k - 1 > n$.

22. Свако a_i има неки прост делилац p_i такав да $p_i^{r_i} \mid a_i$ и $p_i^{r_i}$ не дели производ осталих. Самим тим, у сваком од датих бројева изузев a_i, експонент уз p_i је мањи од r_i. Броју a_i придружујемо прост број p_i. Сваки прост број је придружен највише једном од датих бројева, одакле следи тврђење.

23. Напишимо сваки од датих бројева у облику $a_i = 2^{r_i} b_i$, где је $r_i \geqslant 0$ и b_i непаран $(i = 1, 2, \dots, n+1)$. Пошто за b_i има n могућности, за неке $i \neq j$ је $b_i = b_j$. Тада један од бројева a_i, a_j дели други.

24. По претходном задатку је $k \leqslant [\frac{n+1}{2}]$. За свако a_i, ниједан од бројева ba_i, $b = 1, 2, \dots, [\frac{n}{a_i}]$ није међу датим бројевима. При том су сви овакви бројеви ba_i $(i = 1, \dots, k,\ b \leqslant [\frac{n}{a_i}])$ различити. Зато је $\sum_i [\frac{n}{a_i}] \leqslant n - 1$, а одатле је $\sum_i \frac{n}{a_i} \leqslant n - 1 + k \leqslant \frac{3}{2}n$. Дељењем са n добијамо тражену неједнакост.

25. Нека је $a_k = 2^{r_k} b_k$, где је $r_k \geqslant 0$ цео и $b_k \leqslant 2n - 1$ непаран број. Међу b_k никоја два нису једнака, па су b_k-ови тачно бројеви $1, 3, 5, \dots, 2n-1$ неким редом. Нека је $3^r < \frac{2n}{b_1} < 3^{r+1}$. Како се међу b_i-овима налазе сви бројеви $b_1, 3b_1, 3^2 b_1 \dots, 3^r b_1$, међу бројевима a_i се налази број облика $u_i = 2^{q_i} 3^i b_1$ за свако $i = 0, 1, \dots, r$, при чему је $u_0 = a_1$. Из услова задатка је $q_0 > q_1 > \dots > q_r \geqslant 0$, одакле је $q_0 \geqslant r$. Зато је

$a_1 = 2^{q_0} b_1 \geqslant 2^r b_1 > 2^r \cdot \frac{2n}{3^{r+1}} > 2^r 3^{k-r-1}$. За $r \leqslant k-3$ одавде следи $a_1 > 2^k$. Такође, за $r \geqslant k-2$ и $c_1 \geqslant 5$ је $a_1 \geqslant 2^{k-2} c_1 > 2^k$.

Остаје само случај $c_1 = 1$ или $c_1 = 3$. Опет, међу бројевима a_i се налази број облика $u_i = 2^{q_i} 3^i$ за свако $i = 0, 1, \dots, k$, и $a_1 \in \{u_0, u_1\}$. Као и малопре, $q_i \geqslant k - i$, па је $u_i \geqslant 2^{k-i} 3^i \geqslant 2^k$ и одатле $a_1 \geqslant 2^k$.

26. Одговор је $k = 6([\frac{n}{2}] + 1)$ за $n \neq 4$ и $k = 24$ за $n = 4$.

Нека су $a_1, \dots, a_n$ изабрани бројеви. За свако i постоји $m_i \in \mathbb{N}$ такво да је $n < m_i a_i \leqslant 2n$. Ако је $m_i a_i = m_j a_j$ за неке $i \neq j$, онда је нзс$(a_i, a_j) \leqslant m_i a_i \leqslant 2n$. Зато надаље претпостављамо да је $\{m_i a_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} = \{n+1, \dots, 2n\}$. За $n \notin \{2, 4\}$ бројеви $2([\frac{n}{2}]+1)$ и $3([\frac{n}{2}]+1)$ су у скупу $\{n+1, \dots, 2n\}$, па је њихов НЗС једнак $6([\frac{n}{2}]+1)$. То важи и за $n = 2$, док за $n = 4$ имамо $\min\{\text{нзс}(i, j) \mid 5 \leqslant i < j \leqslant 8\} = 24$.

Сада ћемо показати да за све $n < i < j \leqslant 2n$ важи нзс$(i, j) \geqslant 6([\frac{n}{2}] + 1)$. Како је $j < 2i$, имамо нзс$(i, j) \geqslant 3i$. Притом је нзс$(i, j) = 3i$ само ако је $j = \frac{3}{2} i$ и i је парно, док је у супротном нзс$(i, j) \geqslant 4i > 4n$. Како је $2([\frac{n}{2}]+1)$ најмањи паран број већи од n, тврђење следи.

27. Означимо $m = [\sqrt{n}]$. Довољно је доказати да највише m бројева a_i лежи у интервалу $[m+1, n]$. За ово ћемо показати да, за свако $r = 1, 2, \dots, m$, највише једно a_i припада интервалу $(\frac{n}{r+1}, \frac{n}{r}]$. Претпоставимо супротно, да је $\frac{n}{r+1} < a_i < a_j \leqslant \frac{n}{r}$. Тада је $[a_i, a_j] = \frac{a_i a_j}{(a_i, a_j)} \geqslant \frac{a_i a_j}{a_j - a_i} > \frac{n^2 / r(r+1)}{n/r - n/(r+1)} = n$, контрадикција.

Напомена. Уз мало више пажње, на сличан начин се може показати да је $k \leqslant 1,9\sqrt{n}$.

28. Постоји. Одаберимо све природне бројеве из интервала $[1, \sqrt{\frac{n}{2}}]$ и све парне из интервала $(\sqrt{\frac{n}{2}}, \sqrt{2n}]$. Ови бројеви задовољавају услов задатка, а има их бар $[\sqrt{\frac{n}{2}}] + [\sqrt{\frac{n}{2}}] - [\sqrt{\frac{n}{8}}] \geqslant \frac{3}{4}\sqrt{2} \cdot \sqrt{n} - 2$, где је $\frac{3}{4}\sqrt{2} \approx 1,06$.

29. Нека је $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Означимо $x_i = a_i - 2^i$ и $y_i = \frac{1}{2^i a_i}$. Тада је $a_1 + \cdots + a_k \geqslant 2^k - 1 = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{k-1}$ за све k, тј. $x_1 + \cdots + x_k \geqslant 0$. Сада имамо $\sum_i (\frac{1}{2^i} - \frac{1}{a_i}) = \sum_i x_i y_i = (y_1 - y_2) x_1 + (y_2 - y_3)(x_1 + x_2) + \cdots + (y_{n-1} - y_n)(x_1 + \cdots + x_{n-1}) + y_n (x_1 + \cdots + x_n) \geqslant 0$.

30. Претпоставимо супротно. Показаћемо индукцијом по k да за свако $k \in \mathbb{N}$ постоји скуп T_k од 100 узастопних природних бројева такав да је бар k елемената скупа T_k дељиво неким чланом низа (a_n). За $k = 101$ имаћемо контрадикцију.

За $k = 1$ довољно је узети $T_1 = \{a_1, a_1 + 1, \dots, a_1 + 99\}$. Претпоставимо да постоји T_k за неко k и дефинишимо $P = \prod_{a_i < \max T_k} a_i$ и $X = \{t + P \mid t \in T_k\}$. Бар k елемената скупа X дељиво је неким бројем из S_k: заиста, ако $a_i \mid t$ за $t \in T_k$, онда $a_i \mid t + P$. Шта више, по услову задатка скуп X садржи бар један члан низа a_m, и он није дељив ниједним чланом низа мањим од себе. Зато можемо узети $T_{k+1} = X$ и индукција је завршена.