Сојузен натпревар 1985

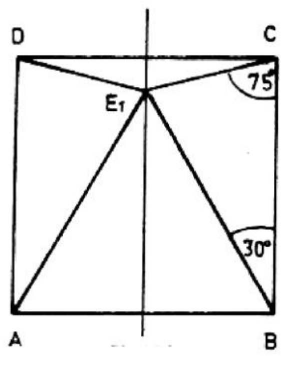
I година

1. Докажи дека меѓу 39 последователни природни броеви има барем еден број чиј збир на цифри е делив со 11.

Решение. Нека n е природен број. Меѓу броевите $n, n+1, ..., n+19$ постојат два чија цифра на единиците е еднаква на нула. Барем кај еден од овие два броја цифрата на десетките не е еднаква на 9. Нека тоа е бројот a и нека S е збирот на неговите цифри. Тогаш $a+19 \le n+19+19 = n+38$, а со пресметување на збировите на цифрите на броевите $a, a+1, a+2, ..., a+19$ се добиваат броевите $S, S+1, S+2, ..., S+10$. Бидејќи меѓу 11 последователни броеви постои број кој е делив со 11, заклучуваме дека збирот на цифрите на барем еден од броевите $n, n+1, ..., n+38$ е делив со 11.

2. Во внатрешноста на квадрат $ABCD$ дадена е точка E таква што триаголникот CDE е рамнокрак со агол од 150° кај темето E. Определи ги аглите на триаголникот ABE.

Решение. Нека E_1 е внатрешна точка на квадратот $ABCD$ таква што ABE_1 е рамностран триаголник, цртеж десно. Тогаш CDE_1 и CE_1B се рамнокраки триаголници (соодветно со основи CD и CE_1) и важи



$$\begin{aligned}\measuredangle CE_1D &= 180^\circ - 2\measuredangle E_1CD \\ &= 180^\circ - 2(90^\circ - \measuredangle E_1CB) \\ &= 2\measuredangle E_1CB = 180^\circ - \measuredangle E_1BC \\ &= 180^\circ - (90^\circ - 60^\circ) = 150^\circ.\end{aligned}$$

Затоа $E = E_1$, па сите агли на триаголникот ABE се еднакви на 60°.

3. Во рамнината се дадени 3000 точки такви што никои три не лежат на иста права. Докажи дека постојат 1000 триаголници со темиња во овие точки такви што никои два од нив немаат заеднички точки.

Решение. Нека l е произволна права која не е паралелна на ниту една од правите кои се определени со дадените точки. Да ги означиме со $l_1, l_2, ..., l_{3000}$ правите секоја од кои содржи по една од дадените точки, а сите се паралелни на правата l, но така што за секој $i \in \{1, 2, ..., 2999\}$ меѓу правите l_i и l_{i+1} не се наоѓа ниту една од тие прави. За секој $k \in \{1, 2, ..., 3000\}$ со A_k да ја означиме онаа од дадените точки која припаѓа на правата l_k. Тогаш триаголниците $A_1A_2A_3$, $A_4A_5A_6,...,A_{2998}A_{2999}A_{3000}$ се дисјунктни меѓу себе.

4. Докажи дека за позитивните реални броеви a,b,c,d,e,f важи неравенството

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{cd}{c+d}+\frac{ef}{e+f}\leq\frac{(a+c+e)(b+d+f)}{a+b+c+d+e+f}.$$

Решение. Нека се x,y,z,u позитивни броеви. Со елементарни трансформации лесно може да го докажеме неравенството

$$\frac{xy}{x+y}+\frac{zu}{z+u}\leq\frac{(x+z)(y+u)}{x+y+z+u} \qquad (1)$$

Ако неравенството (1) двапати последователно го примениме, и тоа прво

$$x=a,y=b,z=c,u=d,$$

а потоа

$$x=a+c,y=b+d,z=e,u=f$$

добиваме

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{cd}{c+d}+\frac{ef}{e+f}\leq\frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d}+\frac{ef}{e+f}\leq\frac{(a+c+e)(b+d+f)}{a+b+c+d+e+f}.$$

II година

1. Определи го најмалиот природен број n со својство збировите на цифрите на броевите n и $n+1$ се деливи со 1985.

Решение. Бараниот број е од видот

$$n=c\underbrace{99...9}_{k}8\underbrace{99...9}_{l}$$

при што l е најмалиот природен број за кој важи $1985\,|\,9l-1$, а k е најмалиот природен број таков што за некој $c\in\{1,2,...,9\}$ важи $1985=9(k+1)+c$. Од условот

$$9l-1=1985s=9\cdot 220s+5s$$

добиваме дека $l=1544$ за $s=7$. Понатаму, лесно се добива $k=219, c=5$.

2. Нека функцијата $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ е зададена со формулата $f(m)=m+[\sqrt{m}]$. Докажи дека за секој $m\in\mathbb{N}$ постои $k\in\mathbb{N}$ таков што

$$f^k(m)=\underbrace{f(f(...(f}_{k}(m))...))$$

е точен квадрат.

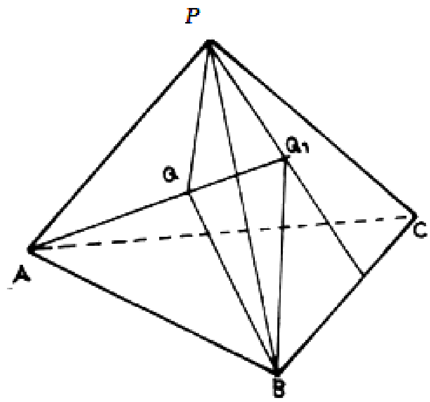
Решение. Да забележиме дека за секој природен број m постои природен број n таков што важи $n^2\leq m<n^2+2n=(n+1)^2-1$. Ако $m=n^2$, тогаш

$$f(m)=f(n^2)=n^2+n,$$
$$f^2(n^2)=n^2+2n,$$
$$f^3(n^2)=n^2+3n=(n+1)^2+n-1,$$
$$f^5(n^2)=(n+1)^2+n-1+2(n+1)=(n+2)^2+n-2,$$
$$f^7(n^2)=(n+2)^2+n-2+2(n+2)=(n+3)^2+n-3,$$
....
$$f^{2n-1}(n^2)=(n+n-1)^2+1,$$
$$f^{2n+1}(n^2)=(2n-1)^2+1+2(2n-1)=(2n)^2.$$

Слично за $m=n^2+nl+k$, каде $l\in\{0,1\}$, $k\in\{1,2,...,n\}$ се добива
$$f^{2k-l}(m)=f^{2k-l}(n^2+nl+k)=(m+k)^2.$$

3. Дадени се тетраедар $PABC$ и точка Q внатре во него. Докажи дека
$$\measuredangle BQC+\measuredangle CQA+\measuredangle AQB>\measuredangle BPC+\measuredangle CPA+\measuredangle APB.$$

Решение. Нека Q_1 е пресекот на правата AQ и рамнината PBC, цртеж десно. Тогаш



$$\begin{aligned}\measuredangle ABP+\measuredangle PBC&=\measuredangle ABP+\measuredangle PBQ_1+\measuredangle Q_1BC\\&>\measuredangle ABQ_1+\measuredangle Q_1BC\\&=\measuredangle ABQ+\measuredangle QBQ_1+\measuredangle Q_1BC\\&>\measuredangle ABQ+\measuredangle QBC.\end{aligned}$$

Според тоа,
$$\measuredangle ABP+\measuredangle PBC>\measuredangle ABQ+\measuredangle QBC$$
и аналогно
$$\measuredangle BCP+\measuredangle PCA>\measuredangle BCQ+\measuredangle QCA,$$
$$\measuredangle CAP+\measuredangle PAB>\measuredangle CAQ+\measuredangle QAB.$$

Со собирање на последните три неравенства добиваме $\alpha_1>\alpha_2$, каде
$$\alpha_1=\measuredangle ABP+\measuredangle PBC+\measuredangle BCP+\measuredangle PCA+\measuredangle CAP+\measuredangle PAB,$$
$$\alpha_2=\measuredangle ABQ+\measuredangle QBC+\measuredangle BCQ+\measuredangle QCA+\measuredangle CAQ+\measuredangle QAB.$$

Според тоа,
$$\begin{aligned}\measuredangle BQC+\measuredangle CQA+\measuredangle AQB&=3\cdot 180^\circ-\alpha_2\\&>3\cdot 180^\circ-\alpha_1\\&=\measuredangle BPC+\measuredangle CPA+\measuredangle APB.\end{aligned}$$

4. Определи го најмалиот природен број n за кој постои множество

$$M \subset \{1,2,...,100\}$$

од n елементи кое ги задоволува условите:

а) 1 и 100 припаѓаат на множеството M,

б) за секој $a \in M \setminus \{1\}$ постојат $x, y \in M$ такви што $a = x + y$.

Решение. Нека $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\} \subset \{1,2,...,100\}$, каде

$$1 = a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_n = 100$$

и нека за M важи условот б). Тогаш

$$a_2 = 2, a_3 \le 4, a_4 \le 8, a_5 \le 16, a_6 \le 32, a_7 \le 64.$$

Ако $50 \notin M$, тогаш од $a_6 + a_7 < 100$ следува $n > 8$, односно $n \ge 9$. Ако $a_k = 50$ за некој индекс k, тогаш од $a_5 + a_6 \le 48 < 50$ следува $k > 7$, т.е. $k \ge 8$, па е $n \ge 9$. Непосредно се проверува дека за множествата

$$M_1 = \{1,2,4,6,10,20,40,60,100\},$$
$$M_2 = \{1,2,3,6,12,13,25,50,100\},$$

се исполнети сите услови на задачата. Според тоа, бараниот број е еднаков на 9.

III и IV година

1. Определи ги сите природни броеви помали од 1000 кои се еднакви на збирот на факториелите на своите цифри.

Решение. Треба да ги определиме сите тројки (x, y, z) за кои важи

$$x, y, z \in \{0,1,2,...,9\}, (x, y, z) \ne (0,0,0),$$
$$100x + 10y + z = x! + y! + z!.$$

Ако (x, y, z) е таква тројка, тогаш $x \le 5, y \le 5, z \le 5$ и $x! + y! + z! \le 3 \cdot 5! = 360$. Навистина, во спротивно ќе важи $x! + y! + z! \ge 6! = 720$, па е $x! \ge 7! = 5040$, што е противречност. Со проверка на броевите 55, 155, 255, 355, 455 лесно се добива дека ниту еден од нив не е решение на задачата, што значи дека најмногу еден од броевите x, y, z е еднаков на 5.

а) Нека точно еден од броевите x, y, z е еднаков на 5. Лесно се проверува дека двата други броја не се еднакви на 4. Затоа важи

$$120 \le x! + y! + z! \le 5! + 4! + 3! = 150.$$

Со проверка за броевите 125, 135, 145 добиваме дека 145 е едно решение на задачата.

б) Нека $x \le 4, y \le 4, z \le 4$. Спо проверка се добива дека во овој случај тројките (0,0,1) и (0,0,2) се единствени решенија на задачата.

Конечно, сите барани броеви се 1, 2 и 145.

2. Нека P е полином со реални коефициенти таков што за секој за секој реален број x важи

$$P(\cos x) = P(\sin x).$$

Докажи дека постои полином Q таков што за секој реален број t важи

$$P(t) = Q(t^4 - t^2).$$

Решение. Нека $P(t) = (t^4 - t^2)Q_1(t) + at^3 + bt^2 + ct + d$. Од последното равенство и од условот на задачата следува дека за секој $x \in \mathbb{R}$ важи

$$\begin{aligned} 0 = \sin^2 x \cos^2 x[Q_1(\cos x) - Q_1(\sin x)] + \\ + (\sin x - \cos x)[a \sin x \cos x + b(\sin x + \cos x) + a + c]. \end{aligned} \tag{1}$$

Од равенството (1) за $x = 0$ добиваме $a + b + c = 0$, а за $x = \pi$ добиваме $a - b + c = 0$, од што следува дека $a + c = 0$ и $b = 0$. Според тоа, равенството (1) можеме да го запишеме во облик

$$\sin^2 x \cos^2 x[Q_1(\sin x) - Q_1(\cos x)] = a(\sin x - \cos x)\sin x \cos x. \tag{2}$$

Бидејќи равенството (2) важи за секој $x \in \mathbb{R}$, а функциите $\sin x$, $\cos x$ и $Q_1(t)$ се непрекинати, добиваме дека и равенството

$$\sin x \cos x[Q_1(\sin x) - Q_1(\cos x)] = a(\sin x - \cos x) \tag{3}$$

важи за секој $x \in \mathbb{R}$. Од (3) за $x = 0$ добиваме $a = 0$, па како $a + c = 0$ имаме $c = 0$. Според тоа,

$$P(t) = (t^4 - t^2)Q_1(t) + d,$$

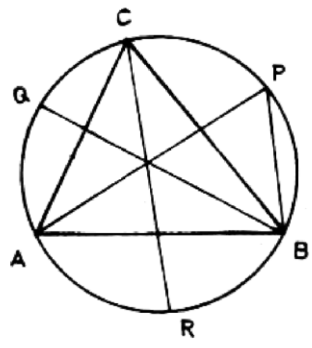
и од (3) следува дека за секој $x \in \mathbb{R}$ важи $Q_1(\sin x) = Q_1(\cos x)$. Сега тврдењето на задачата лесно се докажува со индукција по степените на полиномот P.

3. Во триаголникот ABC симетралите на аглите α, β, γ ја сечат опишаната кружница редоследно во точките P, Q, R. Докажи дека важи:

$$AP + BQ + CR > AB + BC + CA.$$

Решение. Од синусната теорема следува

$$AB = 2r \sin \gamma,$$
$$BC = 2r \sin \alpha,$$
$$CA = 2r \sin \beta,$$



каде r е радиусот на опишаната кружница околу триаголникот ABC, цртеж десно. Понатаму,

$$\measuredangle ABP = \measuredangle ABC + \measuredangle CBP = \beta + \measuredangle CAP = \beta + \tfrac{\alpha}{2},$$

па затоа

$$AP = 2r \sin(\beta + \tfrac{\alpha}{2}).$$

Аналогно добиваме

$$BQ = 2r \sin(\gamma + \tfrac{\beta}{2}) \text{ и } CR = 2r \sin(\alpha + \tfrac{\gamma}{2}).$$

Понатаму, $\beta + \gamma < \pi$, па затоа

$$\frac{CA+AB}{2}=r(\sin\gamma+\sin\beta)=2r\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}<2r\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=2r\sin(\frac{\beta-\gamma}{2}+\frac{\pi}{2})$$
$$=2r\sin(\frac{\beta-\gamma}{2}+\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2})=2r\sin(\beta+\frac{\alpha}{2})=AP.$$

Аналогно докажуваме

$$\frac{AB+BC}{2}<BQ,\quad \frac{BC+CA}{2}<CR.$$

Ако ги собереме последните три неравенстват, добиваме

$$AB+BC+CA<AP+BQ+CR,$$

што и требаше да се докаже.

4. Дадена е квадратна табела $n\times n$ во која се запишани цели броеви така што разликата на произволни два соседни броја од оваа табела не е поголема од 1 (два броја се соседни ако се запишани во квадратчиња кои имаат заедничка страна). Докажи дека постои број кој во табелата се појавува најмалку n пати.

Решение. Нека m_i и M_i се соодветно најмалиот и најголемиот број во $i-$тата колона и нека

$$m=\max_{1\le i\le n} m_i \text{ и } M=\min_{1\le i\le n} M_i.$$

Ќе разгледаме два случаја.

а) $m\le M$. Тогаш секоја колона го содржи секој од броевите $m,m+1,...,M$.

б) $m>M$. Нека $m_i=m$ и $M_j=M$, каде $i\ne j$, $i,j\in\{1,2,...,n\}$. Понатаму, нека k е произволен број од множеството $\{1,2,...,n\}$, а a_{ki} и a_{kj} се броевите кои се наоѓаат во пресеците на $k-$тата редица соодветно со $i-$тата и $j-$тата колона. Тогаш

$$a_{ki}\ge m_i=m>M=M_j\ge a_{kj}.$$

Според тоа, во $k-$тата редица меѓу броевите a_{ki} и a_{kj} се наоѓа бројот $M+1$, т.е. тој број е содржан во секоја редица.

Мала олимпијада

1. Нека $S=\{1,2,...,n\}$. На секој елемент $i\in S$ му придружуваме непразно множество $S_i\subset S$ така што важи:

а) за произволни броеви $i,j\in S$ важи: $j\in S_i \Rightarrow i\in S_j$,

б) за произволни различни броеви $i,j\in S$ важи:

$$|S_i|=|S_j| \Rightarrow S_i\cap S_j=\varnothing.$$

Докажи дека постои број $k\in S$ таков што $|S_k|=1$.

Решение. Нека $k=\max\{|S_1|,|S_2|,...,|S_n|\}$ и нека, на пример, $|S_1|=k$. Ако $S_1=\{a_1,a_2,...,a_k\}$, тогаш од условот а) следува

$$1 \in S_{a_1} \cap S_{a_2} \cap ... \cap S_{a_k} ,$$

а од условот б) следува дека броевите $|S_{a_1}|, |S_{a_2}|, ..., |S_{a_k}|$ се различни меѓу себе. Бидејќи овие броеви припаѓаат на множеството $\{1, 2, ..., k\}$, следува дека еден од нив е еднаков на 1.

2. Нека $ABCD$ е паралелограм и E е точка таква што $AE \perp AB$ и $BC \perp EC$. Докажи дека

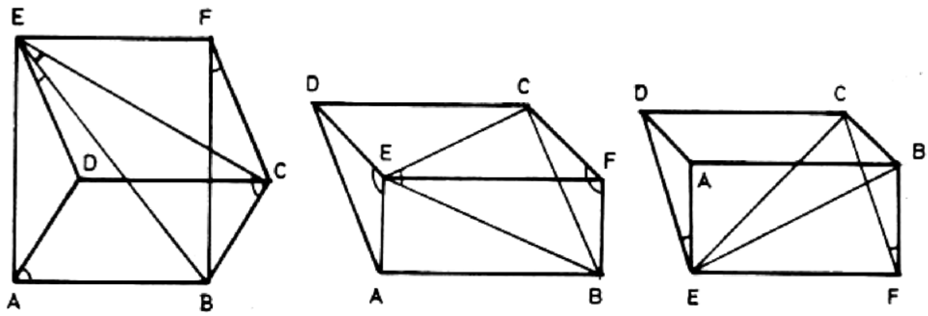
$$\measuredangle AED = \measuredangle BEC \quad \text{или} \quad \measuredangle AED + \measuredangle BEC = 180^\circ .$$

Решение. Нека F е точка, таква што четириаголникот $ABFE$ е правоаголник. Ќе ги разгледаме следниве случаи:

а) $\measuredangle BAD \leq 90^\circ$, цртеж а),

б) $\measuredangle BAD > 90^\circ$, точката E е внатре во паралелограмот $ABCD$, цртеж б),

в) $\measuredangle BAD > 90^\circ$, точката E е надвор од паралелограмот $ABCD$, цртеж в).



а) б) в)

Во секој од овие случаи важи $\measuredangle EAD = \measuredangle FBC$ (агли со паралелни краци) и $AE = BF, AD = BC$. Затоа $\triangle ADE \cong \triangle BCF$, па следува $\measuredangle AED = \measuredangle BFC$. Бидејќи $\measuredangle BCE = \measuredangle BFE = 90^\circ$, точките B, C, E, F припаѓаат на кружницата со дијаметар BE. Во случаите а) и в) $\measuredangle BEC$ и $\measuredangle BFC$ се периферски агли над ист лак, па затоа тие се еднакви, а во случајот б) овие агли се периферски агли над комплементарни лаци, па затоа нивниот збир е еднаков на 180°. Затоа во случаите а) и в) важи

$$\measuredangle BEC = \measuredangle BFC = \measuredangle AED ,$$

а во случајот б) важи

$$\measuredangle AED + \measuredangle BEC = \measuredangle BFC + \measuredangle BEC = 180^\circ .$$

3. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a, b, c, d важи:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2 .$$

Решение. Од очигледното неравенство

$$(a-c)^2+(b-d)^2 \geq 0$$

со елементарни трансформации го добиваме еквивалентното неравенство

$$2(a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ad+bc+cd) \geq (a+b+c+d)^2$$

Понатаму, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува дека за позитивни реални броеви x и y важи $\frac{1}{xy} \geq (\frac{2}{x+y})^2$. Добиваме,

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b} &= \frac{a(d+a)+c(b+c)}{(b+c)(a+d)}+\frac{b(a+b)+d(c+d)}{(c+d)(a+b)} \\ &\geq \frac{4a(d+a)+c(b+c)}{(b+c+a+d)^2}+\frac{4b(a+b)+d(c+d)}{(c+d+a+b)^2} \\ &\geq \frac{4(a^2+b^2+c^2+d^2+ab+bc+cd+ad)}{(a+b+c+d)^2} \geq 2.\end{aligned}$$

Равенство важи ако и само ако е $a=c$ и $b=d$.