Самоил Малчески, Скопје
Ристо Малчески, Скопје

НЕРАВЕНСТВАТА НА МАТЕМАТИЧКИТЕ ОЛИМПИЈАДИ

Меѓу задачите кои најчесто се среќаваат на повеќето математички олимпијади се и задачите во кои треба да се докажем дека важи некое неравенство. Притоа зададените неравенства најчесто се докажуваат елементарно, со користење на елементарните функции и нивните својства, потоа со користење на неравенствата меѓу средините, неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, Енгеловиот принцип на минимум и другите класични неравенства. Во оваа статија ќе презентираме поголем број задачи кои се докажуваат на споменатите начини.

1. ЕЛЕМЕНТАРНО ДОКАЖУВАЊЕ НА НЕРАВЕНСТВА И ПРИМЕНА НА ЕЛЕМЕНТАРНИТЕ ФУНКЦИИ

При елементарното докажување на неравенствата или со користење на својствата на елементарните функции, често пати се користат својствата на квадратната функција или апаратот од диференцијалното сметање. Во продолжение ќе разгледаме неколку задачи од ваков вид.

1. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека важи

$$\frac{3}{2}<\frac{4a+b}{a+4b}+\frac{4b+c}{b+4c}+\frac{4c+a}{c+4a}<9.$$

Решение. Имаме

$$\frac{1}{4}=\frac{4a+b}{4(4a+b)}<\frac{4a+b}{a+4b}<\frac{4(a+4b)}{a+4b}=4.$$

Аналогно добиваме

$$\frac{1}{4}<\frac{4b+c}{b+4c}<4,$$

$$\frac{1}{4}<\frac{4c+a}{c+4a}<4.$$

Понатаму, без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a\le b\le c$. Сега имаме

$$\frac{4c+a}{c+4a}=\frac{c+3c+a}{c+4a}\ge\frac{c+4a}{c+4a}=1,$$

$$\frac{4a+b}{a+4b}=\frac{a+3a+b}{a+4b}\le\frac{a+4b}{a+4b}=1.$$

Конечно,

$$\frac{3}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1<\frac{4a+b}{a+4b}+\frac{4b+c}{b+4c}+\frac{4c+a}{c+4a}<1+4+4=9 .$$

2. Нека n е природен број и нека $x_1, x_2, ..., x_n$ се реални броеви такви што

$$x_1+x_2+...+x_n=0 \text{ и } x_1^2+x_2^2+...+x_n^2=1 .$$

Ако a е најмалиот, а b е најголемиот меѓу броевите $x_1, x_2, ..., x_n$, докажи дека $ab \le -\frac{1}{n}$.

Решение. За секој $i \in \{1,2,...,n\}$ важи $(x_i-a)(b-x_i) \ge 0$, па затоа

$$0 \le \sum_{i=1}^{n}(x_i-a)(b-x_i)=(a+b)\sum_{i=1}^{n}x_i-nab-\sum_{n}^{n}x_i^2=-nab-1 ,$$

од што следува $ab \le -\frac{1}{n}$.

3. Нека $n \ge 4$ е природен број и нека $x_1, x_2, ..., x_n$ се реални броеви такви што

$$x_1+x_2+...+x_n \ge n \text{ и } x_1^2+x_2^2+...+x_n^2 \ge n^2 .$$

Докажи дека постои $i \in \{1,2,...,n\}$ таков што $x_i \ge 2$.

Решение. Нека претпоставиме дека постојат броеви

$$x_1<2,\ x_2<2, ...,\ x_n<2 \qquad (1)$$

кои го задоволуваат условот на задачата. Ако важи $|x_i|<2$ за секој $i \in \{1,2,...,n\}$, тогаш ќе важи

$$4n > x_1^2+x_2^2+...+x_n^2 \ge n^2 ,$$

односно $n<4$, што е противречност. Според тоа, мора барем еден од броевите за кои важи (1) да е помал од -2. Без ограничување на општоста можеме да земеме броевите $x_1, x_2, ..., x_k$ се ненегативни, а броевите $x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n$ се негативни. Притоа $k \le n-1$. Тогаш важи

$$0<-(x_{k+1}+x_{k+2}+...+x_n) \le x_1+x_2+...+x_k-n<2k-n .$$

Оттука следува

$$\begin{aligned} n^2 &\le x_1^2+...+x_k^2+x_{k+1}^2+...+x_n^2 \\ &< 4k+(|x_{k+1}|+|x_{k+2}|+...+|x_n|)^2 , \\ &< 4k+(2k-n)^2=4k(k+1-n) \end{aligned}$$

од што следува дека $k > n-1$, што противречи на $k \le n-1$. Конечно, од добиената противречност следува дека постои $i \in \{1,2,...,n\}$ таков што $x_i \ge 2$.

4. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a+b}{a+2b}+\frac{b+c}{b+2c}+\frac{c+a}{c+2a}<\frac{5}{2}.$$

Решение. Ставаме $x=\frac{a}{b}$, $y=\frac{b}{c}$, $z=\frac{c}{a}$. Тогаш $xyz=1$ и

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{a+2b}+\frac{b+c}{b+2c}+\frac{c+a}{c+2a}&=\frac{x+1}{x+2}+\frac{y+1}{y+2}+\frac{z+1}{z+2}\\&=1-\frac{1}{x+2}+1-\frac{1}{y+2}+1-\frac{1}{z+2}\\&=3-(\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}).\end{aligned}$$

Последното значи дека даденото неравенсвто е еквивалентно со неравенсвтото

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}>\frac{1}{2},$$

при услов $xyz=1$, $x,y,z>0$. Последното неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата

$$2(x+2)(y+2)+2(y+2)(z+2)+2(z+2)(x+2)\ge(x+2\_(y2)(z+2),$$
$$2(xy+yz+zx)+4(x+y+z)+24>xyz+2(xy+yz+zx)+4(x+y+z)+8,$$
$$16>xyz.$$

Последното неравенство важи заради условот $xyz=1$.

5. Нека a,b,c,d се реални броеви такви што

$$a+b+c+d=19 \text{ и } a^2+b^2+c^2+d^2=91.$$

Определи ја најголемата можна вредност на изразот

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}.$$

Решение. Од неравенството $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$ следува неравенството $(a+b+c)^2\le 3(a^2+b^2+c^2)$, па од условот на задачата следува $(19-d)^2\le 3(91-d^2)$, односно $2d^2-19d+44\le 0$, од каде добиваме $4\le d\le\frac{11}{2}$. Истото важи и за другите броеви. Понатаму,

$$\frac{(a-4)(a-5)^2}{a}\ge 0 \qquad\Leftrightarrow\qquad \frac{100}{a}\le a^2-14a+65.$$

Ако ги собереме соодветните неравенства, добиваме

$$100(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}) \le 91-14\cdot 19+4\cdot 64=85,$$

односно

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \le \frac{17}{20}.$$

Знак за равенство се достигнува, на пример, за $a=4, b=c=d=5$.

6. Дадени се реалните броеви $0<a<b\le c<d$. Докажи дека

$$(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d})(\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}+\frac{1}{\frac{1}{b}+\frac{1}{d}}) \le 1. \qquad (1)$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Да ја разгледаме функцијата

$$\begin{aligned} f(x) &= p(x-a)(x-c)+q(x-b)(x-d) \\ &= (p+q)x^2-(p(a+c)+q(b+d))x+pac+qbd, \end{aligned}$$

каде p и q се позитивни реални броеви. Бидејќи $0<a<b\le c<d$, непосредно се проверува дека $f(a)>0,\ f(b)\le 0,\ f(c)\le 0,\ f(d)>0$, при што равенства се можни само за $b=c$. Според тоа, $f(x)$ секогаш има корен, што значи дека $D\ge 0$. За $p=\frac{1}{a+c}$ и $q=\frac{1}{b+d}$ условот $D\ge 0$ е еквивалентен на неравенството (1). За да важи знак за равенство потребно е $f(x)$ да има единствен корен, што е можно само за $b=c$, при што тогаш тој корен ќе биде $x=b=c$ и функцијата е

$$f(x)=(p+q)(x-c)^2.$$

Значи,

$$f(x)=p(x-a)(x-c)+q(x-b)(x-d)=(p+q)(x-c)^2,$$

од каде со изедначување на коефициентите наоѓаме $c^2=ad$.

7. Во правоаголен триаголник ABC со плоштина S е впишана кружница со плоштина S_1 и е опишана кружница со плоштина S_2. Докажи го неравенството

$$® \frac{S-S_1}{S_2} < \frac{1}{®-1}.$$

Решение. Имаме

$$® \frac{S-S_1}{S_2} = ® \frac{2ab-4®r^2}{®c^2} = -(®-1)(\frac{a+b}{c})^2+2®\frac{a+b}{c}-1-®.$$

Изразот на десната страна на низата равенства е квадратна функција во однос на $\frac{a+b}{c}$ и истата има максимум за $-\frac{2\text{®}}{-2(\text{®}-1)}=\frac{\text{®}}{\text{®}-1}$, и тој максимум е еднаков на $\frac{1}{\text{®}-1}$. Според тоа, $\text{®}\frac{S-S_1}{S_2}<\frac{1}{\text{®}-1}$.

8. Нека $x,y,z\neq 1$ се ненегативни броеви такви што $x^2+y^2+z^2=1$. Докажи дека

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Решение. Од $x,y,z\geq 0$, $x,y,z\neq 1$ и $x^2+y^2+z^2=1$ следува дека $x,y,z\in[0,1)$. Да ја разгледаме функцијата $f(t)=t-t^3$, $t\in[0,1]$. Оваа функција е непрекината на интервалот $[0,1]$ и важи $f(0)=f(1)=0$, што значи дека таа на интервалот $[0,1]$ има екстрем. Понатаму, $f'(t)=1-3t^2$, па затоа $t_0=\frac{1}{\sqrt{3}}$ е стационарна точка функцијата f на интервалот $[0,1]$ и како $f''(\frac{1}{\sqrt{3}})=-\frac{6}{\sqrt{3}}<0$ добиваме дека функцијата f има максимум во точката $t_0=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Значи, $\frac{2}{3\sqrt{3}}=f(\frac{1}{\sqrt{3}})\geq f(t)=t-t^3$, за секој $t\in[0,1]$. Според тоа, за секој $t\in[0,1)$ важи $\frac{t}{1-t^2}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}t^2$. Конечно, ако ги собереме соодветните неравенства за $t=x,y,z$ и земеме предвид дека $x^2+y^2+z^2=1$, добиваме

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}y^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}z^2=\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

што и требаше да се докаже.

2. ПРИМЕНА НА НЕРАВЕНСТВАТА МЕЃУ СРЕДИНИТЕ

При докажувањето на неравенствата кои се задаваат на математичките олимпијади најчесто се користат неравенствата меѓу средините. Во следните теореми се дадени овие неравенства, чии докази може да се видат во наведената литература.

Теорема 1. За аритметичката и геометриската средина на позитивните реални броеви $a_1,a_2,...,a_n$ важи $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\geq\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}$, при што знак за равенство важи ако и само ако $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. □

Теорема 2. За геометриската и хармониската средина на позитивни броеви $a_1, a_2, \dots, a_n$ важи $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} a_i^{-1}}$, при што знак за равенство важи ако и само ако $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. □

Теорема 3. За аритметичката и квадратната средина на позитивните реални $a_1, a_2, \dots, a_n$ броеви важи $(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2)^{1/2} \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$, при што знак за равенство важи ако и само ако $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. □

Теорема 4. Нека $a_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ и $\sim_i \in [0,1], i = 1, 2, \dots, n$ се такви, да $\sum_{i=1}^{n} \sim_i = 1$. Тогаш $\prod_{i=1}^{n} a_i^{\sim_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \sim_i a_i$. □

Теорема 5. Нека $x_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ и $t_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ се такви да $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$. Нека r и s се два ненулти реални броеви такви што $r > s$. Тогаш

$$(t_1 x_1^r + t_2 x_2^r + \dots + t_n x_n^r)^{\frac{1}{r}} \geq (t_1 x_1^s + t_2 x_2^s + \dots + t_n x_n^s)^{\frac{1}{s}} . \square$$

9. Нека a, b, c се позитивни реални броеви такви што $ab + bc + ca = 1$. Докажи дека

$$\frac{4}{a+b+c} \leq (a+b)(c\sqrt{3}+1) .$$

Решение. Од неравенството $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ и условот $ab + bc + ca = 1$ следува

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) = 3 ,$$

односно $a + b + c \geq \sqrt{3}$. Сега од последното неравенство, равенството $ab + bc + ca = 1$ и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува неравенството

$$\begin{aligned}(a+b+c)(a+b)(c\sqrt{3}+1) &= (a+b+c)(a+b)c\sqrt{3} + (a+b+c)(a+b) \\ &\geq 3c(a+b) + a^2 + 2ab + b^2 + ac + bc\end{aligned}$$

$$\geq 4(ab+bc+ca)=4,$$

кое е еквивалентно со бараното неравенсвто.

10. Нека $x_1, x_2, ..., x_n$ се ненегативни реални броеви. Докажи го неравенството

$$(x_1+\frac{x_2}{2}+...+\frac{x_n}{n})(x_1+2x_2+...+nx_n)\leq\frac{(n+1)^2}{4n}(x_1+x_2+...+x_n)^2 .$$

Решение. За секој $k\in\{1,2,...,n\}$ важи $(n-k)(k-1)\geq 0$, односно важи $\frac{n}{k}+k\leq n+1$ па затоа од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned}(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{k})(\sum_{k=1}^{n}kx_k) &= \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n}\frac{nx_k}{k})(\sum_{k=1}^{n}kx_k)\\ &\leq \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{4}(\sum_{k=1}^{n}\frac{nx_k}{k}+\sum_{k=1}^{n}kx_k)^2\\ &\leq \frac{1}{4n}(\sum_{k=1}^{n}x_k(\frac{n}{k}+k))^2\\ &\leq \frac{(n+1)^2}{4n}(\sum_{k=1}^{n}x_k)^2.\end{aligned}$$

11. Нека a,b,c,d се позитивни реални броеви такви што $a+b+c+d=4$. Докажи го неравенството

$$\frac{a}{a^3+5}+\frac{b}{b^3+5}+\frac{c}{c^3+5}+\frac{d}{d^3+5}\leq\frac{2}{3} .$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$a^3+2=a^3+1+1\geq 3\cdot\sqrt[3]{a^3\cdot 1\cdot 1}=3a ,$$

т.е. $a^3+5\geq 3a+3$. Аналогно се докажува дека

$$b^3+5\geq 3b+3 ,\ c^3+5\geq 3c+3 \text{ и } d^3+5\geq 3d+3 .$$

Затоа,

$$\frac{a}{a^3+5}+\frac{b}{b^3+5}+\frac{c}{c^3+5}+\frac{d}{d^3+5}\leq\frac{a}{3a+3}+\frac{b}{3b+3}+\frac{c}{3c+3}+\frac{d}{3d+4} ,$$

што значи дека е доволно да се докаже неравенството

$$\frac{a}{3a+3}+\frac{b}{3b+3}+\frac{c}{3c+3}+\frac{d}{3d+3}\leq\frac{2}{3} ,$$

кое е еквивалентно со неравенството

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{d+1}\geq 2\ .$$

Последното неравенство следува од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина и условот $a+b+c+d=4$. Имаме,

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{d+1}\right)\geq\frac{4}{(a+1)+(b+1)+(c+1)+(d+1)}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}\ .$$

12. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви што $x+y+z=18xyz$. Докажи го неравенството

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+2yz+1}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+2xz+1}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+2xy+1}}\geq 1\,.$$

Решение. *Прв начин*. Од условот на задачата и неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина следува

$$xy+yz+zx=xyz\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

$$\geq xyz\cdot\frac{9}{x+y+z}=\frac{9xyz}{18xyz}=\frac{1}{2}.$$

Понатаму, од $1\leq 2xy+2yz+2zx$ и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина имаме

$$x^2+2yz+1\leq x^2+2xy+2zx+4yz$$

$$=(x+2y)(x+2z)$$

$$\leq(x+y+z)^2.$$

Затоа важи

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+2yz+1}}\geq\frac{x}{x+y+z}$$

и аналогно

$$\frac{y}{\sqrt{y^2+2xz+1}}\geq\frac{y}{x+y+z},\quad \frac{z}{\sqrt{z^2+2xy+1}}\geq\frac{z}{x+y+z}\ .$$

Конечно, ако ги собереме последните три неравенства добиваме

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+2yz+1}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+2xz+1}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+2xy+1}}\geq\frac{x}{x+y+z}+\frac{y}{x+y+z}+\frac{z}{x+y+z}=1\,.$$

Втор начин. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува $2yz\leq y^2+z^2$, $2zx\leq z^2+x^2$ и $2xy\leq x^2+y^2$, па затоа

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+2yz+1}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+2xz+1}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+2xy+1}}\geq\frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}}\ .$$

Значи, за да го докажеме бараното неравенство доволно е да докажеме дека

$$\frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}} \geq 1.$$

Последното неравенство е еквивалентно со неравенсттото

$$(x+y+z)^2 \geq x^2+y^2+z^2+1,$$

т.е. со неравенството

$$2xy+2yz+2zx \geq 1,$$

кое се докажува како во прво начин на решавање.

13. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се позитини реални броеви такви што

$$a_1+a_2+...+a_n=1.$$

Докажи го неравенството

$$\frac{a_1^3}{a_1^2+a_2a_3}+\frac{a_2^3}{a_2^2+a_3a_4}+...+\frac{a_{n-1}^3}{a_{n-1}^2+a_na_1}+\frac{a_n^3}{a_n^2+a_1a_2} \geq \frac{1}{2}.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned}\frac{a_1^3}{a_1^2+a_2a_3} &= \frac{a_1^3+a_1a_2a_3-a_1a_2a_3}{a_1^2+a_2a_3} = a_1 - a_1a_2a_3 \cdot \frac{1}{a_1^2+a_2a_3} \\ &\geq a_1 - a_1a_2a_3 \cdot \frac{1}{2a_1\sqrt{a_2a_3}} = a_1 - \frac{1}{2}\sqrt{a_2a_3} \\ &\geq a_1 - \frac{a_2+a_3}{4}.\end{aligned}$$

Со собирање на n аналогни неравенства добиваме

$$\begin{aligned}&\frac{a_1^3}{a_1^2+a_2a_3}+\frac{a_2^3}{a_2^2+a_3a_4}+...+\frac{a_{n-1}^3}{a_{n-1}^2+a_na_1}+\frac{a_n^3}{a_n^2+a_1a_2} \geq \\ &\geq (a_1-\frac{a_2+a_3}{4})+(a_2-\frac{a_3+a_4}{4})+...+(a_{n-1}-\frac{a_n+a_1}{4})+(a_n-\frac{a_1+a_2}{4}) \\ &\geq \frac{a_1+a_2+...+a_n}{2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

14. Нека a, b, c се позитивни реални броеви за кои важи $a^3+b^3+c^3=3$. Докажи го неравенството

$$\frac{1}{3-2a}+\frac{1}{3-2b}+\frac{1}{3-2c} \geq 3.$$

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\begin{aligned}9 &\leq \frac{3}{3-2a}+\frac{3}{3-2b}+\frac{3}{3-2c} \\ &= 1+\frac{2a}{3-2a}+1+\frac{2b}{3-2b}+1+\frac{2c}{3-2c}\end{aligned}$$

$$=3+2(\frac{a}{3-2a}+\frac{b}{3-2b}+\frac{c}{3-2c}),$$

т.е. со неравенството

$$\frac{a}{3-2a}+\frac{b}{3-2b}+\frac{c}{3-2c}\geq 3. \qquad (1)$$

Бидејќи дадените броеви се позитивни и $(\frac{3}{2})^3=\frac{27}{8}>3$, од равенството $a^3+b^3+c^3=3$ следува неравенството $3-2a>0$. Сега од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{a}{3-2a}=\frac{a^3}{(3-2a)a^2}\geq\frac{a^3}{(\frac{3-2a+a+a}{3})^3}=a^3$$

и аналогно

$$\frac{b}{3-2b}\geq b^3 \text{ и } \frac{c}{3-2c}\geq c^3.$$

Конечно, ако ги собереме последните три неравенсвта и го искористиме условот $a^3+b^3+c^3=3$, го добиваме неравенството (1).

15. Нека n,k,M и $a_1,a_2,...,a_n$ се природни броеви за кои важи

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}=k \text{ и } a_1a_2...a_n=M.$$

Ако $M>1$, докажи дека не постои позитивен реален број x таков што важи

$$M(x+1)^k=(x+a_1)(x+a_2)...(x+a_n). \qquad (1)$$

Решение. Прво ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Се секој природен број a е секој позитивен реален број x важи

$$a(x+1)^{\frac{1}{a}}\leq x+a, \qquad (2)$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a=1$.

Доказ. Ако $a=1$, тогаш гледаме дека важи знак за равенство. Нека претпоставиме дека $a>1$. Тогаш од неравенсттото меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{(x+1)+\overbrace{1+...+1}^{a-1}}{a}\geq\sqrt[a]{(x+1)\cdot 1^{a-1}},$$

односно

$$a(x+1)^{\frac{1}{a}}\leq x+a.$$

Притоа знак за равенство важи ако и само ако $x+1=1$, т.е. ако и само ако $x=0$, што шротивречи на $x>0$. ■

Да се вратиме на задачата. Ако постои реален број x таков што важи равенството (1), тогаш од равенствата

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}=k \text{ и } a_1a_2...a_n=M$$

и од лемата следува

$$\begin{aligned}(x+a_1)(x+a_2)...(x+a_n)&=M(x+1)^k\\&=a_1(x+1)^{\frac{1}{a_1}}a_2(x+1)^{\frac{1}{a_2}}...a_n(x+1)^{\frac{1}{a_n}}\\&\leq(x+a_1)(x+a_2)...(x+a_n).\end{aligned}$$

Но, тоа значи дека за секој $a_1,a_2,...,a_n$ во (2) важи знак за равенство, односно дека $a_1=a_2=...=a_n=1$, што противречи на $M>1$.

16. Дадени се броевите $x_i>0, i=1,2,...,n$, $n\geq 3$. Докажи дека е точно барем едно од неравенствата

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}}\geq\frac{n}{2},$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_{i-1}+x_{i-2}}\geq\frac{n}{2}.$$

Индексите, различни од $1,2,...,n$ се разгледуваат по модул n, т.е. $x_0=x_n$, $x_{-1}=x_{n-1}$, $x_{n+1}=x_1$ и $x_{n+2}=x_2$.

Решение. Ќе докажеме дека

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i+x_{i+3}}{x_{i+1}+x_{i+2}}\geq n.$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i+x_{i+3}}{x_{i+1}+x_{i+2}}&=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i+x_{i+1}+x_{i+2}+x_{i+3}}{x_{i+1}+x_{i+2}}-1\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i+x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}}+\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{i+2}+x_{i+3}}{x_{i+1}+x_{i+2}}-n\\&\geq n\cdot\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i+x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}}}+n\cdot\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{x_{i+2}+x_{i+3}}{x_{i+1}+x_{i+2}}}-n\\&=n\cdot 1+n\cdot 1-n=n.\end{aligned}$$

Според тоа,

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}}+\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_{i-1}+x_{i-2}}\geq n,$$

па затоа мора барем еден од двата збира на левата страна на последното неравенство да е поголем од $\frac{n}{2}$, што и требаше да се докаже.

17. За позитивните реални броеви x_i, $i=1,2,3,4,5,6$ важи

$$\sum_{i=1}^{6} x_i = 1 \text{ и } x_1x_3x_5 + x_2x_4x_6 \geq \frac{1}{540}.$$

Нека

$$S = x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_5 + x_4x_5x_6 + x_5x_6x_1 + x_6x_1x_2.$$

Ако $\max S = \frac{p}{q}$, каде $\mathrm{NZD}(p,q)=1$, определи ја вредноста на изразот.

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned} \frac{1}{27} = \left(\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{6} x_i\right)^3 &\geq (x_1+x_4)(x_2+x_5)(x_3+x_6) \\ &= x_1x_3x_5 + x_2x_4x_6 + S \\ &\geq \frac{1}{540} + S. \end{aligned}$$

Оттука следува, $S \leq \frac{19}{540}$, па затоа $\max S = \frac{19}{540}$, при што истиот се достигнува за

$$x_1 + x_4 = x_2 + x_5 = x_3 + x_6 = \frac{1}{3} \text{ и } x_1x_3x_5 + x_2x_4x_6 = \frac{1}{540},$$

односно на пример за

$$x_1 = x_2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{3\sqrt{5}},\ x_4 = x_5 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3\sqrt{5}},\ x_3 = x_6 = \frac{1}{6}.$$

Сега, од $\mathrm{NZD}(19,540)=1$, следува $p=19, q=540$, односно $p+q=559$.

18. Нека n е природен број и α, β, γ се аглите на остроаголен триаголник. Определи ја најмалата можна вредност на збирот

$$T = \mathrm{tg}^n \alpha + \mathrm{tg}^n \beta + \mathrm{tg}^n \gamma.$$

Решение. Нека $t = \mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\gamma$. Бидејќи $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, добиваме

$$\begin{aligned} t &= \mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}(\pi - (\alpha+\beta)) = \mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}(\alpha+\beta) \\ &= \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} \\ &= -\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}\left(1 - \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\right) = \mathrm{tg}(\alpha+\beta)\frac{\cos\alpha\cos\beta - \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} \\ &= \mathrm{tg}(\alpha+\beta)\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}\gamma. \end{aligned}$$

Понатаму, триаголникот е остроаголен, па затоа $\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{tg}\beta, \operatorname{tg}\gamma > 0$ и од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma \leq \left(\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma}{3}\right)^3,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$. Значи,

$t \leq (\frac{t}{3})^3$, т.е. $t \geq 3^{\frac{3}{2}}$. Сега добиваме

$$\begin{aligned} T &= \operatorname{tg}^n\alpha + \operatorname{tg}^n\beta + \operatorname{tg}^n\gamma \geq 3(\operatorname{tg}^n\alpha \operatorname{tg}^n\beta \operatorname{tg}^n\gamma)^{\frac{1}{3}} \\ &= 3(\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma)^{\frac{n}{3}} = 3t^{\frac{n}{3}} \geq 3(3^{\frac{3}{2}})^{\frac{n}{3}} = 3^{\frac{n}{2}+1}. \end{aligned}$$

Според тоа, најмалата можна вредност на T е $3^{\frac{n}{2}+1}$ и истата се достигнува за рамностран триаголник.

19. Дваесет деца имаат 100 конци. Секој конец за краевите го држат две деца. Две деца заедно можат да држат само еден конец. Нека пар конци чии четири краја ги држат различни деца може да се избере на 4050 начини. Докажи дека секое дете држи еднаков број конци.

Решение. Децата да ги означиме со броевите 1, 2, ..., 20. Нека d_i е бројот на коците кои ги држи детето означено со бројот i. Бидејќи секој конец го држат две деца важи

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2 \cdot 100 = 200.$$

Понатаму, бројот на сите парови конци е $\frac{100 \cdot 99}{2} = 4950$. Парот конци кај кој четирите краја не ги држат различни деца, е таков пар конци што постои дете кое држи по еден крај на двата конци. Затоа важи

$$\sum_{i=1}^{20} \frac{d_i(d_i - 1)}{2} = 4950 - 4050 = 900.$$

Оттука следува

$$\sum_{i=1}^{20} d_i^2 = 1800 + \sum_{i=1}^{20} d_i = 1800 + 200 = 2000.$$

Сега, од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува

$$10 = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{n} d_i \leq \sqrt{\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} d_i^2} = 10,$$

па затоа овие средини се еднакви. Но, тоа значи дека $d_1 = d_2 = ... = d_{20}$, што и требаше да се докаже.

20. За позитивните реални броеви a,b,c важи

$$21ab + 2bc + 8ca \le 12 .$$

Определи ја најмалата можна вредност на изразот $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}$.

Решение. Воведуваме смена $a = \frac{x}{3},\ b = \frac{4y}{5},\ c = \frac{3z}{2}$. Тогаш неравенството од условот на задачата го добива видот

$$\frac{7}{15}xy + \frac{3}{15}yz + \frac{5}{15}zx \le 1. \qquad (1)$$

Од тежинското неравенство меѓу аритметичката и геометриската средина (теорема 4) следува

$$(xy)^{\frac{7}{15}}(yz)^{\frac{3}{15}}(zx)^{\frac{5}{15}} \le \frac{7}{15}xy + \frac{3}{15}yz + \frac{5}{15}zx \le 1,$$

т.е. $x^6 y^5 z^4 \le 1$, при што знак за равенство важи за $x = y = z$. Од друга страна, од тежинското неравенство меѓу аритметичката и геометриската средина и последното неравенство следува

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = \frac{6}{2x} + \frac{5}{2y} + \frac{4}{2z} = \frac{15}{2}\left(\frac{6}{15}\frac{1}{x} + \frac{5}{15}\frac{1}{y} + \frac{4}{15}\frac{1}{z}\right)$$

$$\ge \frac{15}{2}\frac{1}{x^{\frac{6}{15}}y^{\frac{5}{15}}z^{\frac{4}{15}}} = \frac{15}{2}\cdot\sqrt[15]{\frac{1}{x^6y^5z^4}} \ge \frac{15}{2},$$

при што знак за равенство важи за $x = y = z$, што заедно со (1) дава $x = y = z = 1$, односно $a = \frac{1}{3},\ b = \frac{4}{5},\ c = \frac{3}{2}$.

3. ПРИМЕНА НА НЕРАВЕНСТВОТО НА КОШИ-БУЊАКОВСКИ-ШВАРЦ

Неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц често пати се користи при докажување на неравенства кои се задаваат на математиките олимпијади. Истото е дадено во следната теорема, чиј доказ може да се види во наведената литература.

Теорема 6. Ако $a_i,\ b_i \in \mathbf{R}$, за $i = 1,2,...,n$, тогаш

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 ,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$. □

21. Нека x, y, z се позитивни реални броеви. Докажи го неравенсвото

$$\frac{2z^2+zy}{(y+\sqrt{zx}+z)^2}+\frac{2x^2+zx}{(z+\sqrt{xy}+x)^2}+\frac{2y^2+yx}{(x+\sqrt{yz}+y)^2}\geq 1.$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(y+\sqrt{zx}+z)^2\leq (x+y+z)(y+2z),$$
$$(z+\sqrt{xy}+x)^2\leq (x+y+z)(z+2x),$$
$$(x+\sqrt{yz}+y)^2\leq (x+y+z)(x+2y).$$

Според тоа,

$$\frac{2z^2+zy}{(y+\sqrt{zx}+z)^2}+\frac{2x^2+zx}{(z+\sqrt{xy}+x)^2}+\frac{2y^2+yx}{(x+\sqrt{yz}+y)^2}\geq$$
$$\geq \frac{2z^2+zy}{(x+y+z)(y+2z)}+\frac{2x^2+zx}{(x+y+x)(z+2x)}+\frac{2y^2+yx}{(x+y+z)(x+2y)}$$
$$\geq \frac{z}{x+y+z}+\frac{x}{x+y+z}+\frac{y}{x+y+z}=1.$$

22. Ако x, y се реални броеви, определи ја најголемата можна вредност на изразот

$$\frac{(x+1)(y+1)(xy+1)}{(x^2+1)(y^2+1)}.$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(x^2+1^2)(1^2+1^2)\geq (x+1)^2,$$
$$(y^2+1^2)(1^2+1^2)\geq (y+1)^2,$$
$$(x^2+1^2)(y^2+1^2)\geq (xy+1)^2.$$

Ако ги помножиме горните неравенства и коренуваме (ако изразите од десно се ненегативни) добиваме

$$2(x^2+1)(y^2+1)\geq (x+1)(y+1)(xy+1).$$

Според тоа, вредноста на дадениот израз е помала или еднаква на 2. Всушност таа е еднаква на 2 само за $x=y=1$.

23. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a,b,c важи

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geq \frac{5}{2}.$$

Решение. Заради поедноставно означување да ставиме

$$A = a^2 + b^2 + c^2 \text{ и } B = ab + bc + ca\,.$$

Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(\tfrac{a}{b+c} + \tfrac{b}{c+a} + \tfrac{c}{a+b})(a(b+c) + b(c+a) + c(a+b)) \ge (a+b+c)^2\,,$$

односно

$$\tfrac{a}{b+c} + \tfrac{b}{c+a} + \tfrac{c}{a+b} \ge \tfrac{A+2B}{2B} = \tfrac{A}{2B} + 1\,.$$

Според тоа, точно е неравенството

$$\tfrac{a}{b+c} + \tfrac{b}{c+a} + \tfrac{c}{a+b} + \sqrt{\tfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \ge \tfrac{A}{2B} + 1 + \sqrt{\tfrac{B}{A}}\,. \qquad (1)$$

Сега од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\tfrac{A}{2B} + \sqrt{\tfrac{B}{A}} = \tfrac{A}{2B} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{B}{A}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{B}{A}} \ge 3\sqrt[3]{\tfrac{AB}{8BA}} = \tfrac{3}{2}\,. \qquad (2)$$

Конечно, од неравенствата (1) и (2) следува бараното неравенство.

24. Докажи дека за секои позитивни реални броеви x, y, z е исполнето неравенството

$$\tfrac{x}{y+z} + \tfrac{25y}{z+x} + \tfrac{4z}{x+y} > 2\,.$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\begin{aligned}\tfrac{x}{y+z} + \tfrac{25y}{z+x} + \tfrac{4z}{x+y} &= (x+y+z)(\tfrac{1}{y+z} + \tfrac{25}{z+x} + \tfrac{4}{x+y}) - (1+25+4)\\ &= \tfrac{1}{2}((y+z) + (z+x) + (x+y))(\tfrac{1}{y+z} + \tfrac{25}{z+x} + \tfrac{4}{x+y}) - 30\\ &\ge \tfrac{1}{2}(\sqrt{y+z}\cdot\tfrac{1}{\sqrt{y+z}} + \sqrt{z+x}\cdot\tfrac{5}{\sqrt{z+x}} + \sqrt{x+y}\cdot\tfrac{2}{\sqrt{x+y}})^2 - 30\\ &= \tfrac{1}{2}(1+5+2)^2 - 30 = 2.\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $y+z = \tfrac{z+x}{5} = \tfrac{x+y}{2}$, односно $(x, y, z) = (-3t, t, -2t), t \in \mathbb{R}$. Но, тогаш барем еден од броевите x, y, z нема да е позитивен, што противречи на условот на задачата.

25. Нека a, b, c се должини на страни на триаголник. Докажи го неравенството

$$3(a^3b + b^3c + c^3a) + 2(ab^3 + bc^3 + ca^3) \ge 5(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)\,.$$

Решение. Ставаме $x = \tfrac{a+b-c}{2}, y = \tfrac{a+c-b}{2}, z = \tfrac{b+c-a}{2}$ и добиваме $x > 0$,

$y>0$, $z>0$ и $x+y=a, x+z=b, y+z=c$. Сега даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$3\sum_{cyc}(x+y)^3(x+z)+2\sum_{cyc}(x+y)(x+z)^3 \geq 5\sum_{cyc}(x+y)^2(x+z)^2 .$$

По ослободувањето од заградите добиваме дека даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$3(x^3y+y^3z+z^3x)+2(xy^3+yz^3+zx^3)\geq 5xyz(x+y+z) .$$

Последното неравенство го делиме со $xyz>0$ и го добиваме еквивалентното неравнество

$$3(\frac{x^2}{z}+\frac{y^2}{x}+\frac{z^2}{y})+2(\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+\frac{x^2}{y})\geq 5(x+y+z) ,$$

кое следува од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц

Забелешка. Неравенството не важи за било кои позитивни реални броеви. На пример, тоа не важи за $a=\frac{1}{100}, b=1, c=\frac{5}{4}$.

26. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви што

$$xy+yz+zx=x+y+z .$$

Докажи го неравенството

$$\frac{1}{x^2+y+1}+\frac{1}{y^2+z+1}+\frac{1}{z^2+x+1}\leq 1 . \qquad (1)$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(x^2+y+1)(1+y+z^2)\geq (x+y+z) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{x^2+y+1}\leq\frac{1+y+z^2}{(x+y+z)^2} ,$$

па затоа ако последното неравенство го собереме со аналогните неравенства, добиваме

$$\frac{1}{x^2+y+1}+\frac{1}{y^2+z+1}+\frac{1}{z^2+x+1}\leq\frac{3+x+y+z+x^2+y^2+z^2}{(x+y+z)^2} .$$

Според тоа, за да го докажеме неравенството (1) доволно е да го докажеме неравенството

$$\frac{3+x+y+z+x^2+y^2+z^2}{(x+y+z)^2}\leq 1 ,$$

кое заради $xy+yz+zx=x+y+z$ последователно е еквивалентно со неравенствата

$$(x+y+z)^2\geq 3+x+y+z+x^2+y^2+z^2,$$
$$x+y+z\geq 3.$$

Последното неравенство е точно, бидејќи од условот на задачата следува

$$3(x+y+z)=3(xy+yz+zx)\le(x+y+z)^2 .$$

27. Докажи дека за секои позитивни реални броеви x, y, z важи

$$\frac{x^2}{xy+z}+\frac{y^2}{yz+x}+\frac{z^2}{zx+y}\ge\frac{(x+y+z)^3}{3(x^2(y+1)+y^2(z+1)+z^2(x+1))} .$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(\frac{x^2}{xy+z}+\frac{y^2}{yz+x}+\frac{z^2}{zx+y})(x(xy+z)+y(yz+x)+z(zx+y))\ge(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+z\sqrt{z})^2 \quad (1)$$

Од неравенството меѓу тежинските средини со ред $r=\frac{3}{2}$ и $s=1$ (теорема 5) следува

$$(\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+z\sqrt{z}}{3})^{\frac{2}{3}}\ge\frac{x+y+z}{3},$$

односно

$$(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+z\sqrt{z})^2\ge\frac{(x+y+z)^3}{3} . \quad (2)$$

и од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx . \quad (3)$$

Сега, од 1), (2) и (3 следува:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{xy+z}+\frac{y^2}{yz+x}+\frac{z^2}{zx+y}&\ge\frac{(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+z\sqrt{z})^2}{(x(xy+z)+y(yz+x)+z(zx+y))}\\&=\frac{(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+z\sqrt{z})^2}{x^2y+y^2z+z^2x+xy+yz+zx}\\&\ge\frac{(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+z\sqrt{z})^2}{x^2y+y^2z+z^2x+x^2+y^2+z^2}\\&\ge\frac{(x+y+z)^3}{3(x^2(y+1)+y^2(z+1)+z^2(x+1))}.\end{aligned}$$

4. ПРИМЕНА НА ЕНГЕЛОВИОТ ПРИНЦИП НА МИНИМУМ

Енегеловиот принцип на минимум всушност е друг запис на неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, но заради неговата едноставна примена истиот засебно се разгледува. Истиот едаден во теоремата 7, чиј доказ може да се најде во литературата која е наведен на крајот од оваа статија.

Теорема 7. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се реални броеви и $x_1, x_2, ..., x_n$ се ненегативни реални броеви. Тогаш $\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+...+\frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{x_1+x_2+...+x_n}$, при што знак за равенство важи ако и само ако $\frac{a_1}{x_1}=\frac{a_2}{x_2}=...=\frac{a_n}{x_n}$. □

28. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c=2$. Докажи го неравенството

$$\frac{(a-1)^2}{b}+\frac{(b-1)^2}{c}+\frac{(c-1)^2}{a} \geq \frac{1}{4}\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}\right).$$

Решение. Од Енгеловиот принцип на минимум и од равенството $a+b+c=2$ следува

$$\frac{(a-1)^2}{b}+\frac{(b-1)^2}{c} \geq \frac{(2-a-b)^2}{b+c}=\frac{c^2}{b+c},$$

$$\frac{(b-1)^2}{c}+\frac{(c-1)^2}{a} \geq \frac{(2-b-c)^2}{c+a}=\frac{a^2}{c+a},$$

$$\frac{(c-1)^2}{a}+\frac{(a-1)^2}{b} \geq \frac{(2-c-a)^2}{a+b}=\frac{b^2}{a+b}.$$

Горните неравенства ги собираме и добиваме

$$\frac{(a-1)^2}{b}+\frac{(b-1)^2}{c}+\frac{(c-1)^2}{a} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{a+b}+\frac{c^2}{b+c}+\frac{a^2}{c+a}\right). \qquad (1)$$

Понатаму, важи

$$\frac{b^2}{a+b}+\frac{c^2}{b+c}+\frac{a^2}{c+a}-\frac{a^2}{a+b}-\frac{b^2}{b+c}-\frac{c^2}{c+a}=\frac{b^2-a^2}{a+b}+\frac{c^2-b^2}{b+c}+\frac{a^2-c^2}{c+a}$$
$$=b-a+c-b+a-c=0,$$

односно

$$\frac{b^2}{a+b}+\frac{c^2}{b+c}+\frac{a^2}{c+a}=\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}.$$

Според тоа, важи

$$\frac{1}{4}\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{a+b}+\frac{c^2}{b+c}+\frac{a^2}{c+a}\right). \qquad (2)$$

Конечно, од неравенството (1) и равенството (2) следува бараното неравенство.

29. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи го неравенството

$$\frac{a}{1+b^3}+\frac{b}{1+c^3}+\frac{c}{1+a^3} \geq \frac{3}{2}.$$

Решение. Ставаме $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$ и неравенството го добива видот

$$\frac{\frac{y}{x}}{1+\frac{z^3}{y^3}}+\frac{\frac{z}{y}}{1+\frac{x^3}{z^3}}+\frac{\frac{x}{z}}{1+\frac{y^3}{x^3}}\geq\frac{3}{2},$$

$$\frac{y^4}{y^3x+z^3x}+\frac{z^4}{z^3y+x^3y}+\frac{x^4}{x^3z+y^3z}\geq\frac{3}{2},$$

$$\frac{y^6}{y^5x+z^3xy^2}+\frac{z^6}{z^5y+x^3yz^2}+\frac{x^6}{x^5z+y^3zx^2}\geq\frac{3}{2}. \qquad (1)$$

Од Енгеловиот принцип на минимум следува

$$\frac{y^6}{y^5x+z^3xy^2}+\frac{z^6}{z^5y+x^3yz^2}+\frac{x^6}{x^5z+y^3zx^2}\geq\frac{(x^3+y^3+z^3)^2}{y^5x+z^3xy^2+z^5y+x^3yz^2+x^5z+y^3zx^2},$$

па затоа за да го докажеме неравенството (1) доволно е да го докажеме неравенството

$$\frac{(x^3+y^3+z^3)^2}{y^5x+z^3xy^2+z^5y+x^3yz^2+x^5z+y^3zx^2}\geq\frac{3}{2},$$

кое е еквивалентно со неравенството

$$2(x^6+y^6+z^6)+4(x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3)\geq 3(y^5x+z^5y+x^5z)+$$
$$+3(z^3xy^2+x^3yz^2+y^3zx^2).$$

Последното неравенство следува од неравенствата

$$x^6+x^6+x^3z^3\geq 3x^5z \text{ и } x^3y^3+x^3z^3+x^3z^3\geq 3x^3yz^2,$$

и аналогните неравенства, кои следуваат од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина.

30. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c=3$. Докажи дека

$$\frac{a^4}{b^2+c}+\frac{b^4}{c^2+a}+\frac{c^4}{a^2+b}\geq\frac{3}{2}.$$

Решение. *Прв начин*. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{a^4}{b^2+c}+\frac{b^2+c}{4}\geq 2\sqrt{\frac{a^4}{b^2+c}\cdot\frac{b^2+c}{4}}=a^2.$$

Аналогно добиваме

$$\frac{b^4}{c^2+a}+\frac{c^2+a}{4}\geq b^2,$$

$$\frac{c^4}{a^2+b}+\frac{a^2+b}{4}\geq c^2.$$

Ги собираме последните неравенства и добиваме

$$\frac{a^4}{b^2+c}+\frac{b^2+c}{4}+\frac{b^4}{c^2+a}+\frac{c^2+a}{4}+\frac{c^4}{a^2+b}+\frac{a^2+b}{4}\geq a^2+b^2+c^2,$$

т.е.

$$\frac{a^4}{b^2+c}+\frac{b^4}{c^2+a}+\frac{c^4}{a^2+b}\geq \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)-\frac{1}{4}(a+b+c)\,. \qquad (1)$$

Понатаму, од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\geq \frac{a+b+c}{3},$$

па како $a+b+c=3$, од последното неравенство следува

$$a^2+b^2+c^2\geq 3\,.$$

Конечно, од (1), последното неравенство и условот на задачата следува

$$\frac{a^4}{b^2+c}+\frac{b^4}{c^2+a}+\frac{c^4}{a^2+b}\geq \frac{3}{4}\cdot 3-\frac{1}{4}\cdot 3=\frac{3}{2}\,.$$

Втор начин. Од Енгеловиот принцип на минимум и условот на задачата следува

$$\frac{a^4}{b^2+c}+\frac{b^4}{c^2+a}+\frac{c^4}{a^2+b}\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2+b^2+c^2+a+b+c}=\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2+b^2+c^2+3}\,. \qquad (2)$$

Понатаму, од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува

$$a^2+b^2+c^2\geq 3\,.$$

Сега, ако ја воведеме смената $a^2+b^2+c^2=x$, тогаш од (2) следува дека треба да докажме дека

$$\frac{x^2}{x+3}\geq \frac{3}{2},$$

при услов $x\geq 3$. Навистина,

$$\frac{x^2}{x+3}=\frac{x}{1+\frac{3}{x}}\geq \frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}\,.$$

31. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c=3$. Докажи го неравенството

$$\frac{a^2}{a+b^2}+\frac{b^2}{b+c^2}+\frac{c^2}{c+a^2}\geq \frac{3}{2}\,.$$

Решение. *Прв начин*. Од неравенстото меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{a^2}{a+b^2} = a - \frac{ab^2}{a+b^2} \ge a - \frac{ab^2}{2\sqrt{ab^2}} = a - \frac{b\sqrt{a}}{2}.$$

Ако последното неравенство го собереме со аналогните неравенства, добиваме

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{a+b^2} + \frac{b^2}{b+c^2} + \frac{c^2}{c+a^2} &\ge a+b+c-\tfrac{1}{2}(b\sqrt{a}+c\sqrt{b}+a\sqrt{c})\\ &= 3-\tfrac{1}{2}(b\sqrt{a}+c\sqrt{b}+a\sqrt{c}).\end{aligned}$$

Сега, ако ги воведеме смените $x=\sqrt{a}, y=\sqrt{b}, z=\sqrt{c}$, добиваме дека е доволно да го докажеме неравенството

$$3-\tfrac{1}{2}(xy^2+yz^2+zx^2) \ge \tfrac{3}{2},$$

т.е. неравенството

$$xy^2+yz^2+zx^2 \le 3, \tag{1}$$

при услов $x^2+y^2+z^2=3$.

Сега, прво од неравенството меѓу артиметичката и геометриската, а потоа од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина, ако се искористи условот $x^2+y^2+z^2=3$, следува

$$\begin{aligned}3(xy^2+yz^2+zx^2) &= y(2xy+z^2)+x(2zx+y^2)+z(2yz+x^2)\\ &\le y(x^2+y^2+z^2)+x(x^2+y^2+z^2)+z(x^2+y^2+z^2)\\ &= 3(x+y+z) \le 9\sqrt{\tfrac{x^2+y^2+z^2}{3}} = 9,\end{aligned}$$

т.е. точно е неравенството (1).

Втор начин. Од Енгеловиот принцип на минимум следува

$$\frac{a^2}{a+b^2}+\frac{b^2}{b+c^2}+\frac{c^2}{c+a^2} = \frac{a^4}{a^3+a^2b^2}+\frac{b^4}{b^3+b^2c^2}+\frac{c^4}{c^3+c^2a^2} \ge \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^3+b^3+c^3+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

па затоа доволно е да докажеме дека

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^3+b^3+c^3+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} \ge \frac{3}{2}.$$

Ако се искорити усковот $a+b+c=3$, добиваме дека последното неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата

$$2(a^2+b^2+c^2)^2 \ge 3(a^3+b^3+c^3+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

$$2(a^4+b^4+c^4)+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \ge 3(a^3+b^3+c^3)$$

$$2(a^4+b^4+c^4)+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \ge (a+b+c)(a^3+b^3+c^3)$$

$$a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \ge ab^3+ac^3+ba^3+bc^3+ca^3+cb^3. \tag{2}$$

Сега, од неравенството меѓу аритметичката и геометрискста средина следува

$$a^4+a^2b^2\ge 2a^3b,\qquad b^4+b^2a^2\ge 2b^3a,\qquad c^4+c^2a^2\ge 2c^3a,$$
$$a^4+a^2c^2\ge 2a^3c,\qquad b^4+b^2c^2\ge 2b^3c,\qquad c^4+c^2b^2\ge 2c^3b.$$

Конечно, ако ги собереме последните шест неравенства и добиеното неравенсвто го поделиме со 2, го добиваме неравенството (2).

32. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека важи

$$\frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{a}}{b+c}+\frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{b}}{c+a}+\frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{c}}{a+b}\ge\frac{9+3\sqrt{3}}{2\sqrt{a+b+c}}.$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a+b+c=1$, (Зошто?). Тогаш неравенството последователно го добива видот

$$\frac{1+\sqrt{a}}{1-a}+\frac{1+\sqrt{b}}{1-b}+\frac{1+\sqrt{c}}{1-c}\ge\frac{9+3\sqrt{3}}{2},$$

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}+\frac{\sqrt{a}}{1-a}+\frac{\sqrt{b}}{1-b}+\frac{\sqrt{c}}{1-c}\ge\frac{9+3\sqrt{3}}{2}. \tag{1}$$

Од Енгеловиот принцип на минимум следува

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}=\frac{1^2}{1-a}+\frac{1^2}{1-b}+\frac{1^2}{1-c}\ge\frac{(1+1+1)^2}{3-(a+b+c)}=\frac{9}{2}. \tag{2}$$

Понатаму, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{a(1-a)^2}{4}=a\cdot\frac{1-a}{2}\cdot\frac{1-a}{2}\le\left(\frac{a+\frac{1-a}{2}+\frac{1-a}{2}}{3}\right)^3=\frac{1}{27},$$

односно $\sqrt{a}(1-a)\le\frac{2}{3\sqrt{3}}$ и аналогно $\sqrt{b}(1-b)\le\frac{2}{3\sqrt{3}}$ и $\sqrt{c}(1-c)\le\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Според тоа,

$$a\sqrt{a}(1-a)+b\sqrt{b}(1-b)+c\sqrt{c}(1-c)\le\frac{2}{3\sqrt{3}}(a+b+c)=\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Сега, од претходното неравенство и неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{a}}{1-a}+\frac{\sqrt{b}}{1-b}+\frac{\sqrt{c}}{1-c}&\ge\frac{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{1-a}}\sqrt[4]{a^3}\sqrt{1-a}+\frac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt{1-b}}\sqrt[4]{b^3}\sqrt{1-b}+\frac{\sqrt[4]{c}}{\sqrt{1-c}}\sqrt[4]{c^3}\sqrt{1-c}}{a\sqrt{a}(1-a)+b\sqrt{b}(1-b)+c\sqrt{c}(1-c)}\\&=\frac{a+b+c}{a\sqrt{a}(1-a)+b\sqrt{b}(1-b)+c\sqrt{c}(1-c)}\\&=\frac{1}{a\sqrt{a}(1-a)+b\sqrt{b}(1-b)+c\sqrt{c}(1-c)}\\&\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Конечно, од последното неравенство и од неравенсвтвото (2) следува неравенството (1).
Литература

Литература

1. Ilišević, I., GH-nejednakost, Osječki matematički list, 8, 2008
2. Ilišević, I., KA-nejednakost, Osječki matematički list, 6, 2006
3. Mustafić, S., Geometrijski dokazi nejednakosti između brojevnih sredina, Evolventa, 2018
4. Starc, Z., Nejednakost između aritmetičke I geometrijske sredina, Osiječka matematička škola, 4, 2004
5. Арсланагић, Ш., Неједнакости између бројних средина и њихова примјена, Тангента, 1999
6. Малчески, Р., Елементарни алгебарски и аналитички неравенства, Армаганка, Скопје, 2019
7. Малчески, Р., Енгелов принцип на минимум, Сигма/Математички талент, 2021
8. Малчески, Р., Неравенства меѓу средните, Сигма/Математички талент, 2021
9. Малчески, Р., Неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц, Сигма/ Математички талент, 2021
10. Мићић, Б., Класе средина и геометријска илустрација средина два броја (I део), Тангента, 2002
11. Мићић, Б., Класе средина и геометријска илустрација средина два броја (II део), Тангента, 2002