Јапанска теорема

Милан Павловић, **Београд**

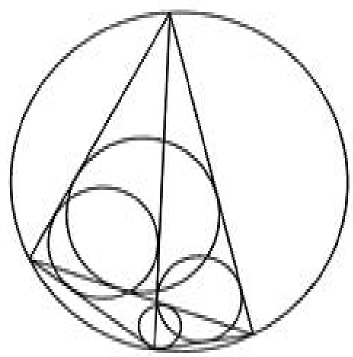
1. Маруjамин проблем

Године 1800. Риокван Маруjама исписао је геометријски проблем на дрвеној таблици и окачио га у светилишту Цуруока–Саноша. Можда нама данас делује чудно ово качење математичких проблема на врата храма, међутим, у тадашњем Јапану то је било уобичајено.

Маруjамин оригинални проблем гласио је:

> Нацртај шест линија у кругу (као на слици) и четири круга уписана у три од тих линија. Уколико су полупречници јужног, источног и западног круга 1 сун, 2 суна, и 3 суна редом, колики је полупречник северног круга?

Одговор: 4 суна[1].



Слика 1. Маруjамин оригинални проблем

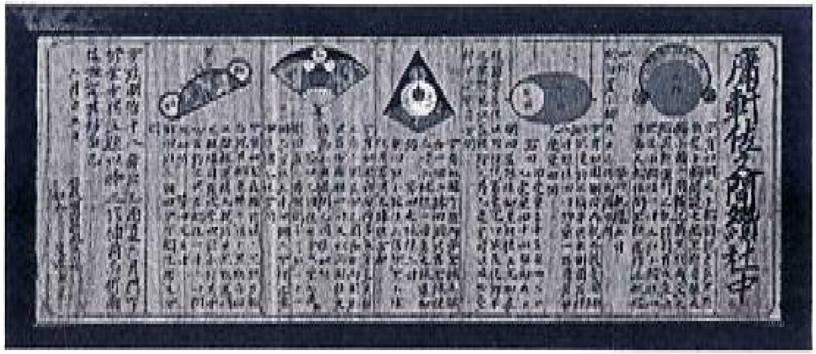
Јапанска култура позајмила је много од суседне Кине. Будизам, математика, папир за писање, чај, све је то дошло из Кине. Тако је и овај проблем дошао из Кине, па се теорема о којој ћемо овде писати назива и Кинеска теорема. Иначе ово је само један од многобројних геометријских проблема које су разматрали стари јапански математичари. Фухита Каген[2] је сакупио велики број таквих проблема и објавио их.

Сангаку („подлога за рачунање") су јапански геометријски проблеми и теореме Еуклидске геометрије који су на дрвеним таблама постављани на будистичка светилишта у Едо периоду (1603–1867). Прву збирку ових проблема објавио је Фухита 1790. године у свом делу Шимпеки („Математички проблеми са храма"), а другу 1806. године. Традиција решавања математичких проблема била је раширена међу свим слојевима друштва. Многи, пошто би решили неки проблем, исписивали су га на дрвеним

[1]Сун је традиционална јапанска мера за дужину – 1 сун приближно је 3 cm.

[2]Фухита Каген (1765–1821)

таблицама и качили на светилишта. Иако је много сангаку таблица изгубљено, преко 800 још увек виси окачено у разним храмовима Јапана.

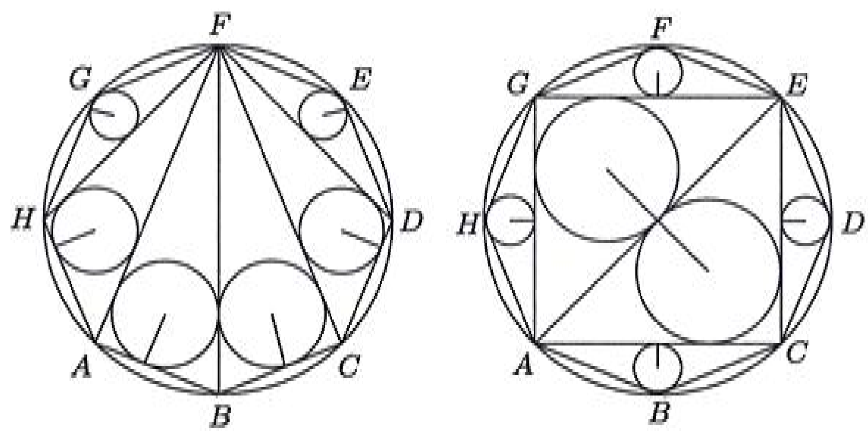


Слика 2. Сангаку

У овом раду решићемо Марујамин проблем. Како бисмо наслутили у ком правцу треба да размишљамо, размотримо један уводни задатак.

2. Један задатак

Задатак. У јединични круг уписан је правилан осмоугао. Затим су темена спојена на два различита начина, тј. извршена је триангулација тог осмоугла на два различита начина приказана на слици 3. Израчунати збир свих полупречника кругова уписаних у добијене троуглове. Урадити то за обе триангулације и упоредити резултате.



Слика 3. Две триангулације правилног осмоугла

Пре него што решимо задатак, објаснимо шта значи триангулација. У геометрији, триангулација полигона P јесте разлагање (декомпозиција) тог полигона на троуглове чија је унија цео полигон P, а чије се унутрашњости не секу. Наравно, темена сваког троугла су нека три темена пологона.

Решење. Будући да тражимо полупречнике уписаних кругова, корисна ће нам бити следећа формула: $P = sr$, где је P површина троугла, s његов полуобим и r полупречник уписаног круга.

Размотримо најпре прву триангулацију. Обележимо дужину странице осмоугла са a. Применом косинусне теореме на троугао AOB, где је O центар описаног круга, добијамо $a^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos\theta$, где је θ централни угао осмоугла, па је $\theta = 45°$ и $a = \sqrt{2-\sqrt{2}}$. До истог резултата, уз мало више посла, можемо доћи и применом Питагорине теореме. Помоћу Питагорине (и косинусне) теореме добијамо и дужине дијагонала приказаних на слици 3, лево. Имамо да је

$$FD = FH = \sqrt{2}, \quad FA = FC = 2 + \sqrt{2} \quad \text{и} \quad FB = 2.$$

Обележимо са r_i, s_i, P_i, $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$, редом полупречнике кругова уписаних у $\triangle HFG$, $\triangle AFH$, $\triangle BFA$, $\triangle CFB$, $\triangle DFC$, $\triangle EFD$, њихове полуобиме и површине. Сада можемо лако добити површине троуглова који учествују у триангулацији:

$$P_1 = P_6 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}, \quad P_2 = P_5 = \frac{1}{2}, \quad P_3 = P_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Полупречнике уписаних кругова добићемо користећи формулу $sr = P$. За то су нам потребни полуобими s_i:

$$\begin{aligned} s_1 = s_6 &= \sqrt{2-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ s_2 = s_5 &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \\ s_3 = s_4 &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}} + 2 + \sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}. \end{aligned}$$

Како су разломци које смо добили прилично компликовани, а нас интересује само збир свих полупречника, израчунаћемо их приближно, на две децимале:

$$r_1 = r_6 \approx 0{,}11, \quad r_2 = r_5 \approx 0{,}25, \quad r_3 = r_4 \approx 0{,}28.$$

Одавде видимо да је при оваквој триангулацији сума свих унутрашњих полупречника приближно $2 \cdot (0{,}11 + 0{,}25 + 0{,}28) = 1{,}28$.

Размотримо сада другу триангулацију. Обележимо са R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6 редом полупречнике кругова уписаних у $\triangle GEF$, $\triangle AGH$, $\triangle BCA$, $\triangle CDE$, $\triangle ACE$, $\triangle AEG$. Одмах примећујемо да су $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = r_1$, где је r_1 из претходног случаја. Такође, лако добијамо $R_5 = R_6 = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \approx 0,42$, па имамо да је сума свих полупречника приближно $2 \cdot (0{,}11 + 0{,}11 + 0{,}42) = 1,28$, што се поклапа са сумом у претходном случају. Да ли се ово десило случајно? Да ли би одговор био другачији да смо заокругљивали на више децимала? Одговор је негативан. И о томе управо говори Јапанска теорема.

3. Јапанска теорема

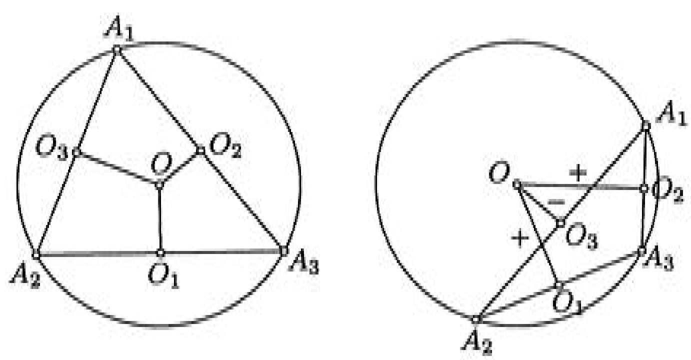
Решење Марујаминог проблема директно добијамо применом јапанске теореме. До савремених математичара она није дошла преко Марујаме и Јапана, већ од Роџера

Џонсона[3] и његове хваљене књиге – *Напредна Еуклидска геометрија*, први пут објављене 1929. године. На 193. страни Доверовог (Dover) издања из 1960. године он нас извештава о Јапанској теореми.

Јапанска теорема. *Нека је дат конвексан полигон који је уписан у круг и нека је извршена његова триангулација. Нека је у сваки тако добијени троугао уписан круг. Сума полупречника свих тих кругова је константна и не зависи од триангулације.*

Специјалан случај наведене теореме, када триангулацију вршимо тако што повлачимо дијагонале из само једног темена, био је познат у западном свету још 1800. године.

Јапанску теорему можемо доказати на неколико начина. Доказ који је презентовао Џонсон у својој књизи користи Карноову[4] теорему, па ћемо најпре њу доказати. Да бисмо једноставније формулисали теорему (и покрили све случајеве), уводимо следеће правило за додељивање знака дужинама: ако је O произвољна тачка у равни троугла $A_1A_2A_3$ и O_1, O_2, O_3 редом растојања тачке O од страница A_2A_2, A_3A_1, A_1A_2 (видети слику 4), онда је OO_i негативно ако и само ако је цела дуж OO_i ван троугла $A_1A_2A_3$. Приметимо да нам ово омогућава да збир површина троуглова OA_1A_2, OA_2A_3, OA_3A_1 даје површину троугла $A_1A_2A_3$.



Слика 4.

Карноова теорема. *У било ком троуглу $A_1A_2A_3$ сума растојања (узетих са знаком) центра описаног круга O до страница је константна и износи $R+r$, где је R полупречник описаног круга, а r полупречник уписаног круга:* $OO_1 + OO_2 + OO_3 = R + r$.

Доказ Карноове теореме. Приметимо најпре да је четвороугао $O_1A_3O_2O$ тетивни, јер му је збир наспрамних углова $180°$. Такође, тетивни су и $A_2O_1OO_3$ и $O_3OA_1O_2$ па можемо применити Птоломејеву[5] теорему: *производ две дијагонале тетивног четвороугла једнак је збиру производа његових наспрамних страница*. Ослањајући се на договор о знаку дужина, из Птоломејеве теореме добијамо:

$$OA_3 \cdot O_1O_2 = O_1O \cdot O_2A_3 + OO_2 \cdot O_1A_3,$$

[3] Roger Johnson (1890–1954)

[4] Lazare Nicolas Marguerite, Comte Carnot (1753–1823)

[5] $K\lambda\alpha\upsilon\delta\iota o\varsigma \Pi\tau o\lambda\epsilon\mu\alpha\iota o\varsigma$ (90–168). Доказ Птоломејеве теореме може се пронаћу у скоро свим књигама и збиркама за први разред гимназије.

$$OA_2 \cdot O_1O_3 = O_1O \cdot O_3A_2 + OO_3 \cdot O_1A_2,$$

$$OA_1 \cdot O_3O_2 = O_3O \cdot O_2A_1 + OO_2 \cdot O_3A_1.$$

Сабирајући претходне једнакости и користећи да је $OA_1 = OA_2 = OA_3 = R$ и $O_1O_2 + O_2O_3 + O_3O_1 = s$ добијамо:

$$\begin{aligned}
Rs &= OO_1(O_2A_3 + O_3A_2) + OO_2(O_1A_3 + O_3A_1) + OO_3(O_1A_2 + O_2A_1) \\
&= OO_1(s - A_2O_1) + OO_2(s - A_1O_2) + OO_3(s - O_3A_1) \\
&= s(OO_1 + OO_2 + OO_3) - (OO_1 \cdot A_2O_1 + OO_2 \cdot A_1O_2 + OO_3 \cdot O_3A_1).
\end{aligned}$$

Како је

$$OO_1 \cdot A_2O_1 + OO_2 \cdot A_1O_2 + OO_3 \cdot O_3A_1 = P(\triangle A_1A_2A_3) = sr,$$

после скраћивања са s добијамо тражени идентитет. □

Сада смо спремни за доказ Јапанске теореме.

Доказ Јапанске теореме. Претпоставимо да су троуглови који се добијају триангулацијом нумерисани и да је полупречник круга уписаног у i-ти троугао r_i. Претпоставимо још и да су удаљености центра O (описаног круга) до страница i-тог троугла $OO_1^{(i)}, OO_2^{(i)}, OO_3^{(i)}$. Приметимо да сваки троугао као свој описани круг има исти круг $k(O, R)$, па Карноова теорема даје:

$$r_i + R = OO_1^{(i)} + OO_2^{(i)} + OO_3^{(i)}.$$

Одавде је:

$$\begin{aligned}
S = \sum_i r_i &= \sum_i (OO_1^{(i)} + OO_2^{(i)} + OO_3^{(i)} - R) \\
&= \sum_i (OO_1^{(i)} + OO_2^{(i)} + OO_3^{(i)}) - \sum_i R.
\end{aligned}$$

Сада користимо чињеницу да је број троуглова у триангулацији независан од триангулације (триангулација n–тостраног полигона садржи $n-2$ троуглова). На основу овога закључујемо да је $\sum R$ константна за све триангулације. Остаје још да докажемо да је и

$$S' = \sum_i (OO_1^{(i)} + OO_2^{(i)} + OO_3^{(i)})$$

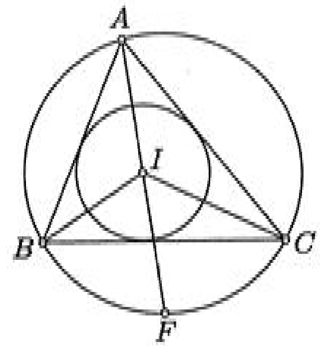
константно.

Стога посматрајмо било коју дијагоналу која учествује у триангулацији. Како се дијагонала налази у унутрашњости полигона, она је заједничка страница за тачно два троугла триангулације. Самим тим, нормала OO' из O на уочену дијагоналу сече један од тих троуглова и остаје потпуно ван другог. Сада закључујемо да се OO' појављује двапут у суми S' али без ефекта на њу јер се једном појављује са знаком плус, а други пут са знаком минус. Као резултат добијамо да је сума S' једноставно збир свих нормала из O на странице тог полигона, тј. не зависи од саме триангулације. □

3. Још два доказа Јапанске теореме

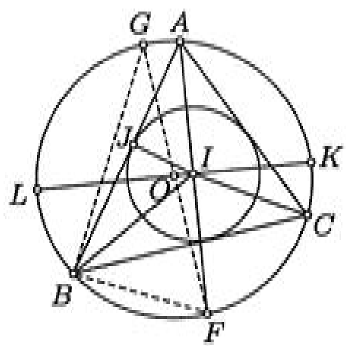
Наводимо још два доказа Јапанске теореме. У тим доказима нећемо користити Карноову теорему. Ипак, ни они нису сасвим елементарани. Користићемо неколико помоћних тврдњења – такозваних лема.

Лема 1. Нека је дат троугао ABC и центар његовог уписаног круга I. Нека AI сече описани круг око ABC у F. Тада су дужи FB, FC, FI једнаке. Другим речима, тачке B, C и I се налазе на кругу са центром у F.



Слика 5.

Доказ леме 1. Очигледно је (видети слику 5) $\sphericalangle BIF = \sphericalangle IBA + \sphericalangle BAI = \frac{\sphericalangle B}{2} + \frac{\sphericalangle A}{2}$. Такође, $\sphericalangle IBF = \sphericalangle IBC + \sphericalangle CBF = \sphericalangle IBC + \sphericalangle CAF = \frac{\sphericalangle B}{2} + \frac{\sphericalangle A}{2}$. Дакле, $\sphericalangle BIF = \sphericalangle IBF$ и $FI = FB$. Слично доказујемо и да је $FI = FC$, па тачке B, I и C леже на кругу са центром у F. □



Слика 6.

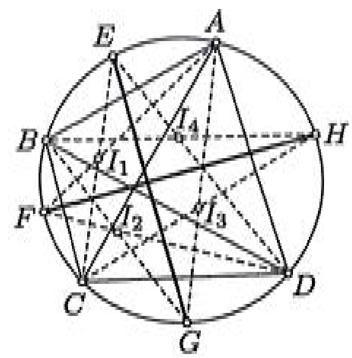
Лема 2. Ако су O и I центри описаног и уписаног круга неког троуга, а R и r полупречници описаног и уписаног круга, онда је $R^2 - 2Rr = OI^2$.

Доказ леме 2. Продужимо AI до пресека са описаним кругом, нека је то тачка F (слика 6). Уочимо два пречника описаног круга, FG и KL ($O \in FL$, $O, I \in KL$).

Ако је IJ нормала из I на страницу AB, онда је $IJ = r$. Како је $\sphericalangle BAF = \sphericalangle BGF$, два правоугла троугла AJI и GBF су слична. Стога, $\frac{r}{AI} = \frac{BF}{2R}$, или $2Rr = AI \cdot BF = AI \cdot IF$, према Леми 1. То значи да је $LI \cdot IK = (R + OI)(R - OI) = R^2 - OI^2$. Дакле, важи $R^2 - 2Rr = OI^2$. □

Лема 3. Нека је $ABCD$ тетивни четвороугао. Ако су I_1, I_2, I_3, I_4 центри кругова уписаних редом у троуглове ABC, BCD, CDA и DAB, тада је $I_1I_2I_3I_4$ правоугаоник.

Доказ леме 3. Нека E, F, G, H означавају средишње тачке лукова AB, BC, CD и DA редом (слика 7).



Слика 7.

Тада E лежи на симетрали углова BCA и BDA. Слично, свака од тачака F, G, H лежи у пресеку одговарајућих симетрала што је приказано на слици 7. Ово значи да се симетрале AF и CE секу у I_1. Аналогно размишљамо и за I_2, I_3 и I_4. Једнаки лукови AH и HD чине једнаким и углове код F, јер је FH симетрала угла AFD. Из истих разлога FH је симетрала угла BHC. Користећи Лему 1 за троуглове ABC и BDC, добијамо $FI_1 = FB = FC = FI_2$. Одавде следи да је I_1I_2 нормално на симетралу угла I_1FI_2, тј. на FH. Слично, I_3I_4 је нормално на FH, па су I_1I_2 и I_3I_4 паралелне линије. Аналогно претходном, закључујемо и да су I_1I_4 и I_2I_3 паралелне линије, обе нормалне на EG. Како су EG и FH међусобно нормалне, закључујемо да је $I_1I_2I_3I_4$ правоугаоник. □

Лема 4. Нека је $ABCD$ правоугаоник чије се дијагонале секу у S. Нека је P било која тачка у равни правоугаоника. Тада је

$$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2 = 2PS^2 + 2AS^2.$$

Доказ леме 4. Како је PS тежишна линија троуглова PCA и PBD, једноставно добијамо да је $PA^2 + PC^2 = 2AS^2 + 2PS^2 = PB^2 + PD^2$. □

Други доказ Јапанске теореме. Најпре доказујемо да теорема важи за произвољан тетиван четвороугао $ABCD$. Уколико су I_1, I_2, I_3 и I_4 центри уписаних кругова троуглова ABC, BCD, CDA и DAB, онда на основу леме 3 знамо да је четвороугао $I_1I_2I_3I_4$ правоугаоник. Користећи лему 4 добијамо $OI_1^2 + OI_3^2 = OI_2^2 + OI_4^2$. Међутим, на основу леме 2 за свако i важи $OI_i^2 = R^2 - 2Rr_i$. Одавде видимо да важи

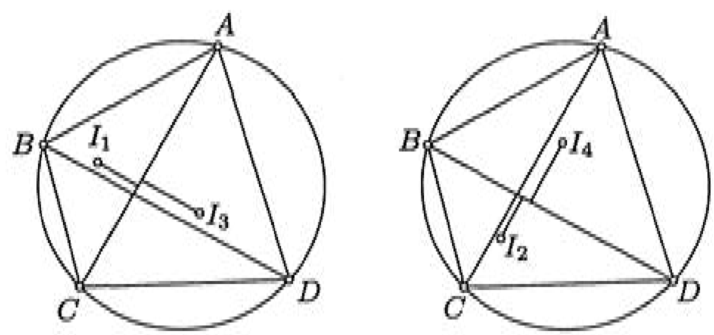
$$R^2 - 2Rr_1 + R^2 - 2Rr_3 = R^2 - 2Rr_2 + R^2 - 2Rr_4,$$

одакле директно имамо $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$. Овиме је доказан специјални случај теореме за четвороугао.

Општи случај доказујемо индукцијом. Нека тврђење важи за све n–тоуглове и нека нам је дат тетиван $(n+1)$–тоугао. Уочимо његова било која два несуседна темена A_i и A_j и повуцимо дијагоналу A_iA_j која ће поделити дати полигон на два са мањим бројем страница, а затим на њих применимо индукцијску хипотезу. □

Трећи доказ Јапанске теореме. И овога пута, најпре доказујемо специјалан случај за произвољан тетиван четвороугао $ABCD$. Користићемо ознаке из доказа леме 3 и ослањати се на слику 7.

Нека AC сече I_1I_3 у V и BD сече I_2I_4 у W.



Слика 8.

Докажимо најпре да троуглови AVI_3 и BWI_2 имају једнаке углове.

Очигледно је

$$\sphericalangle AVI_3 = \frac{1}{2}\sphericalangle CAD = \frac{1}{2}\sphericalangle CBD = \sphericalangle I_2BW.$$

Затим, да бисмо доказали да су углови $\sphericalangle VI_3A$ и $\sphericalangle WI_2B$ једнаки, приметимо да је

$$\sphericalangle VI_3A = \sphericalangle VI_3I_4 + \sphericalangle I_4I_3A \;\text{ и }\; \sphericalangle WI_2B = \sphericalangle WI_2I_1 + \sphericalangle I_1I_2B.$$

У правоугаонику $I_1I_2I_3I_4$ (лема 4) углови $\sphericalangle VI_3I_4$ и $\sphericalangle WI_2I_1$ су једнаки. Тако да треба да покажемо само $\sphericalangle I_4I_3A = \sphericalangle I_1I_2B$. Из леме 1 знамо да се тачке A, I_4, I_3 и D налазе на кругу са центром у H. Такође, тачке B, I_1, I_2 и C налазе се на кругу са центром у F, па имамо

$$\sphericalangle I_4I_3A = \sphericalangle I_4DA = \frac{1}{2}\sphericalangle BDA = \frac{1}{2}\sphericalangle BCA = \sphericalangle BCI_1 = \sphericalangle I_1I_2B.$$

Из свега наведеног закључујемо да је $\sphericalangle AVI_3 = \sphericalangle BWI_2$. Како је $I_1I_3 = I_2I_4$ и I_1I_3 сече AC под истим углом као што I_2I_4 сече BD, пројекција I_1I_3 нормална на AC је исте дужине као пројекција I_2I_4 нормална на BD. Дужине ових пројекција су тачно $r_1 + r_3$ и $r_2 + r_4$, па имамо $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$.

Општи случај доказујемо индукцијом као у претходном доказу. □

Литература

[1] Fukagawa Hidetoshi, Tony Rothman, *Sacred Mathematics*, Princeton University Press, Princeton, 2008.

[2] Ross Honsberger, *Mathematical Gems III*, The Mathematical Association of America, Washington, 1985.

[3] Roger A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover Publications, New York, 1929.

[4] M. Ahuja, W. Uegaki, K. Matsushita, *Japanese theorem: A little known theorem with many proofs. Parts I and II*, Missouri Journal of Mathematical Sciences 16: стране 72–80, 149–158, 2004.

[5] `http://www.jstor.org/`

[6] `https://www.britannica.com/`

[7] `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/`

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2015/16 година