

АЛГОРИТМИ ЗА ИЗРАЧУНАВАЊЕ БРОЈА π

др Ђура Паунић, Нови Сад

Једна од најважнијих и најстаријих математичких константи је број

$$\pi = 3.1415926535\ 8979323846\ 2643383279\ 5028841971\ 6939937510\ \dots$$

која је, између осталог, однос обима и пречника круга. Одређивање вредности ове константе је фасцинирало велики број математичара током дуге историје математике.

КРАТАК ПРЕГЛЕД ИЗРАЧУНАВАЊА БРОЈА π

Прва апроксимација броја π је $\pi \approx 3$ коју је примењивао низ народа. Међутим, чим је ниво математике код неког народа постао мало виши, одмах је уочено да је ова апроксимација мања од праве вредности и коришћене су боље апроксимације. На пример, у старом Египту се појављује вредност за $\pi \approx \frac{256}{81}$, у Месопотамији $\pi \approx \frac{25}{8}$ и сл.

ГЕОМЕТРИЈСКИ ПОСТУПАК ЗА ИЗРАЧУНАВАЊЕ π

Највећи напредак у старом веку је учињен у Старој Грчкој, која је имала и најнапреднију геометрију. Наиме, велики старогрчки математичар Архимед (око 287 – 212. године пне) је доказао да је његова приближна вредност $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. За доказ је искористио чињеницу да је обим круга већи од обима уписаног правилног полигона са 96 страна, а мањи од обима описаног правилног полигона од 96 страна. Обим правилног полигона од 96 страна је израчунао тако што је пошао од обима правилног уписаног и описаног шестоугла, извео обрасце за везу обима уписаног и описаног полигона са n и $2n$ страна и применио обрасце 4 пута.

Ако се са o_n означи обим правилног полигона са $2^n s_0$ страница, где је са s_0 означен број страница полазног полигона уписаног у круг јединичног пречника, а са O_n означи обим правилног полигона са $2^n S_0$ страница, где је са S_0 означен број страница полазног полигона описаног око круга јединичног пречника, тада се коришћењем тригонометрије лако могу извести обрасци

$$O_{n+1} = \frac{2O_n o_n}{O_n + o_n}, \quad o_{n+1} = \sqrt{O_{n+1} o_n}.$$

За полазни полигон се може изабрати шестоугао ($O_0 = 2\sqrt{3}$, $o_0 = 3$) или квадрат ($O_0 = 4$, $o_0 = 2\sqrt{2}$). Ови или слични обрасци за израчунавање обима или површина правилних полигона описаних и уписаних у круг су се користили наредних 1800 година за израчунавање броја π . Најбољи резултат добијен коришћењем геометријског поступка је израчунавање броја π на 35 децимала из XVI века.

Најпогоднији поступак за израчунавање броја π геометријском методом је предложио велики холандски математичар К. Хајгенс (Christiaan Huygens, 1629 – 1695), 1654. године. Он је доказао да је

$$o_n < \pi < \frac{2}{3}o_n + \frac{1}{3}O_n.$$

Користећи Хајгенсову формулу добија се да се број π може израчунати овако

$$o_0 = 3, \quad O_0 = 2\sqrt{3},$$

$$O_{n+1} = \frac{2O_n o_n}{O_n + o_n}, \quad o_{n+1} = \sqrt{O_{n+1} o_n}, \quad \pi_n = \frac{2}{3}o_n + \frac{1}{3}O_n.$$

ИЗРАЧУНАВАЊЕ БРОЈА π КОРИШЋЕЊЕМ РЕДОВА

У другој половини XVII века је откривен ред за аркус тангенс који се показао врло погодан за израчунавање вредности броја π .

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} x &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots + (-1)^k t^{2k} + \dots) dt = \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad |x| \leq 1. \end{aligned}$$

Ред за аркус тангенс се не може директно успешно применити за израчунавање броја π , јер када се у њега стави $x = 1$ добија се

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^k \frac{1}{2k+1} + \dots,$$

тзв. Лајбницов ред за $\pi/4$, који врло споро конвергира. На пример, ако се сабере првих 100 чланова реда добија се $\pi \approx 3.1514934010\dots$, а збир првих 1000 чланова реда даје $\pi \approx 3.1425916543\dots$. Међутим, нека је $\operatorname{tg} \alpha = a$ и $\operatorname{tg} \beta = b$, тада се из адиционе формуле за тангенс

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta},$$

када се уместо α стави $\operatorname{arctg} a$, а уместо β $\operatorname{arctg} b$ и примени аркус тангенс на обе стране, добија да за аркус тангенс важи

$$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} b = \operatorname{arctg} \frac{a+b}{1-ab}.$$

Ако се у ову формулу стави $a = \frac{1}{2}$ и $b = \frac{1}{3}$ добија се да је

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Када се исти поступак примени да се $\operatorname{arctg} \frac{1}{3}$ растави на збир два аркус тангенса, добија се формула

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8},$$

коју је користио П. Дазе 1844. године за израчунавање броја π на 200 децимала.

Врло погодну формулу за израчунавање броја π је извео Џон Мечин 1706. године

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

Једноставне формуле су добили Клаузен и Клингенштирн

$$\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7}.$$

$$\frac{\pi}{4} = 8 \operatorname{arctg} \frac{1}{10} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} - 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{515}.$$

Следеће две формуле су извели Гаус и Штремер и коришћене су 1961. године за израчунавање броја π на 100000 децимала, јер се израчунавају само 4 вредности аркус тангенса које се комбинују на различите начине и тако омогућују проверу израчунавања

$$\frac{\pi}{4} = 12 \operatorname{arctg} \frac{1}{18} + 8 \operatorname{arctg} \frac{1}{57} - 5 \operatorname{arctg} \frac{1}{239},$$

$$\frac{\pi}{4} = 6 \operatorname{arctg} \frac{1}{8} + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{57} + \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

Ескот је пронашао формулу

$$\frac{\pi}{4} = 22 \operatorname{arctg} \frac{1}{28} + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{443} - 5 \operatorname{arctg} \frac{1}{1393} - 10 \operatorname{arctg} \frac{1}{11018},$$

или слична формула која нема посебно име

$$\frac{\pi}{4} = 44 \operatorname{arctg} \frac{1}{57} + 7 \operatorname{arctg} \frac{1}{239} - 12 \operatorname{arctg} \frac{1}{682} + 24 \operatorname{arctg} \frac{1}{12943}.$$

Ојлер је извео трансформацију реда за аркус тангенс

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1+x^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)^k, \quad |x| \leq 1.$$

Ако се у ову формулу стави $x = 1$ добија се да је

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(2k+1)!!} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots,$$

што је ред за π који умерено брзо конвергира. При том су коришћене стандардне ознаке за факторијел $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k$, $0! = 1! = 1$ и двоструки факторијел $(2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)$, $(2k+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)$, $0!! = 1!! = 1$. Овај поступак омогућује да се једна за другом израчунавају цифре броја π у било којој основи без коришћења аритметике вишеструке прецизности. Поступак је имплементиран у следећем програму којим се израчунава 50 цифара броја π . Ако се n повећа треба користити и другачке целе бројеве.

```
program spigot;

const
  n = 50;
  duzina = 167;  (* 10 * n div 3 + 1 *)

var
  a : array[1 .. duzina] of integer;
  i, j, k, devetke, cifra, pom, prenos : integer;
  pisi : boolean;

begin
  for i := 1 to duzina do
    a[i] := 2;
  pisi := false;
  for j := 0 to n do begin
    prenos := 0;
    k := duzina + duzina - 1;
    for i := duzina downto 1 do begin
      pom := 10 * a[i] + prenos * i;
      a[i] := pom mod k;
      prenos := pom div k;
      k := k - 2
    end;
    a[1] := prenos mod 10;
    prenos := prenos div 10;
    if prenos = 9 then
      devetke := devetke + 1
    else
      if prenos = 10 then begin
        write(cifra+1:1);
        for i := 1 to devetke do
          write(0);
        cifra := 0;
        devetke := 0
      end
    else begin
      if pisi then
        write(cifra:1)
      else
        pisi := true;
        cifra := prenos;
        if devetke <> 0 then begin
```

```

        for i := 1 to devetke do
            write(9);
            devetke := 0
        end
    end
end
end.

```

Друга врста редова за израчунавање броја π су редови до којих је први дошао велики индијски математичар С. Рамануджан (Srinivasa Ramanujan, 1887 – 1920) почетком овог века. Најпознатији је

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(4n)!}{(n!)^4} \cdot \frac{1103 + 26390n}{396^{4n}} \right).$$

Снаки сабирак овог реда повећава тачност броја π за отприлике осам децимала. Побољшање овог реда је

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{426880\sqrt{10005}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(6n)!}{(n!)^3(3n)!} \cdot \frac{13591409 + 545140134n}{640320^{3n}}.$$

у коме сваки сабирак повећава тачност броја π за око 14 цифара.

1995. године је нађен следећи ред за π

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right).$$

Овај ред омогућује да се израчунају поједине хексадесималне цифре броја π , а да се не израчунава цео број. Тако, почев од билионите (10^{12}), хексадесималне цифре броја π су 87F72B1DC9786914B15B16FE9218B...

ИТЕРАТИВНИ ПОСТУПЦИ ЗА ИЗРАЧУНАВАЊЕ БРОЈА π

Итеративни поступци који се изводе из особина аритметичко-геометријске средине су најбржи поступци за израчунавање броја π . Први алгоритам ове врсте су објавили Р. Brent и Е. Саламин 1976. године: Нека су $a_0 = 1$, $b_0 = \sqrt{2}/2$, $s_0 = 1/2$. Ако се дефинише за $n = 0, 1, 2, \dots$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad s_{n+1} = s_n - 2^{n+1}(a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2),$$

$$\text{тада } \pi_{n+1} = \frac{2a_{n+1}^2}{s_{n+1}} \text{ квадратно конвергира ка } \pi.$$

Другим речима у сваком кораку се добија око **два пута** више тачних децимала броја π (2, 8, 18, 40, 83, 170, 344, 693 итд.) и у сваком кораку треба користити пуну прецизност. Овај алгоритам се најједноставније реализује следећим програмским фрагментом :

```
a := 1;  
b := 1/sqrt(2);  
s := 0.25;  
x := 1;  
for i := 1 to n do begin  
  t := a;  
  a := (a + b)/2;  
  b := sqrt(t * b);  
  t := t - a;  
  s := s - x * t * t;  
  x := 2 * x  
end;  
t := 1/(4 * s);  
x := a + b;  
pi := x * x * t;
```

Могуће је још више повећати брзину конвергенције итеративног поступка. У алгоритму кога је предложио Дејвид Бејли (David Bailey) 1986. године и њиме израчунао π на 29 360 111 децимала, у сваком кораку се добија око четири пута више тачних децимала броја π . Ако уведемо ознаке:

$$a_0 = \sqrt{2} - 1, \quad b_0 = 6 - 4\sqrt{2},$$

$$a_{n+1} = \frac{1 - \sqrt[4]{1 - a_n^4}}{1 + \sqrt[4]{1 - a_n^4}},$$

$$b_{n+1} = b_n(1 + a_{n+1})^4 - 2^{2n+3}a_{n+1}(1 + a_{n+1} + a_{n+1}^2),$$

тада b_n конвергира ка $1/\pi$.

Паралелизујући овај поступак, јапански математичари Ј. Канада и Д. Такахаши јуна 1997. године израчунали су 51 539 600 000 децимала броја π за 29 сати и 3 минута на рачунару Хитачи SR2201 који има 1024 процесора. Јула 1997. године су на истом рачунару израчунали исти број децимала броја π претходним поступком за 37 сати и 8 минута. Децимале су се сложиле. Њихов програм за до 32М (1М = 1024^2) децимала броја π може да се добије са ftp сервера Института за математику у Новом Саду.¹

ИЗРАЧУНАВАЊА ВЕШЕСТРУКЕ ПРЕЦИЗНОСТИ

За представљање броја вишеструке прецизности је најједноставније користити низ цифара. Тада се сабирање, одузимање или множење могу једноставно програмирати имитирањем рачунања децималним бројевима. Једино је погодније да је основа 100 ако се рачуна са двобајтним целим бројевима или 10000 ако се рачуна са четворобајтним, а не 10 као код обичних децималних бројева. Тиме се рачуна одједном са две или 4 децималне цифре па се петље знатно скраћују.

¹<ftp://atlas.im.ns.ac.yu/pub/tangenta/super.pi.zip>

Дељење може да се сведе на множење реципрочном вредношћу, а за израчунавање реципрочне вредности и квадратног корена се користе следећи брзи итеративни алгоритми.

За израчунавање реципрочне вредности броја a се користи низ бројева вишеструке прецизности

$$x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2,$$

у коме се за почетну вредност x_0 узима приближна оцена $1/a$. За израчунавање елемената овог низа се не користи дељење, а низ конвергира квадратно. Могуће је користити и нешто компликованији низ

$$x_{n+1} = x_n(1 + (1 - ax_n)(1 + (1 - ax_n))),$$

у коме је x_0 приближна оцена $1/a$. Овај поступак конвергира кубно (у свакој итерацији број тачних цифара постаје око три пута већи).

За израчунавање квадратног корена из броја a се користи следећи поступак. Најпре се итеративно израчунава $1/\sqrt{a}$ низом

$$x_{n+1} = \frac{3x_n - x_n^2 a}{2},$$

који квадратно конвергира, а за почетну вредност x_0 се узме нека груба апроксимација $1/\sqrt{a}$, па се на крају помножи са a ($\sqrt[3]{a} = \sqrt{\sqrt{a}}$).

При израчунавању реципрочне вредности и квадратног корена не мора да се у сваком кораку користити пуна прецизност. Довољно је удвајати број децимала до пуне прецизности што мало убрзава израчунавања.

**Статијата прв пат е објавена во списанието Тангента на ДМ
на Србија во 1997/98 година**