БМО 2002

1. Некои парови на множество од n точки $A_1, A_2, ..., A_n$ ($n \geq 4$) се меѓусебно поврзани со отсечки, така што секоја точка е поврзана со барем три од дадените точки. Докажи дека постојат различни точки $X_1, X_2, ..., X_{2k} \in \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ за некој $k \geq 2$ така што точките X_i и X_{i+1} се поврзани за секој $i\,(1 \leq i \leq 2k)$ каде $X_{2k+1} = X_1$.

   Решение. Да го разгледаме најдолгиот пат $Y_1Y_2...Y_m$ со меѓусебно различни точки $Y_i \in \{A_1, A_2, ..., A_n\}$. Заради максималноста на патот, точката Y_1 е поврзана само со точката Y_2 и некои Y_i, Y_j, каде $2 < i < j \leq n$. Меѓу индексите $2, i, j$, два се со иста парност: да ги означиме со $k, l\ (k < l)$. Тогаш $Y_1Y_kY_{k+1}...Y_lY_1$ е кружен пат со парен број точки.

2. Низата $\{a_n\}_{n\geq 1}$ е дефинирана со $a_1 = 20, a_2 = 30, a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n, n \geq 1$. Определи ги сите природни броеви n за кои $1 + 5a_na_{n+1}$ е точен квадрат.

   Решение. *Прв начин*. Од рекуреантната релација следува
$$5a_na_{n+1} - 5a_{n-1}a_n = 5a_n(3a_n - 2a_{n-1}) = (4a_n - a_{n-1})^2 - (a_{n-1} + a_n)^2$$
$$= (a_n + a_{n+1})^2 - (a_{n-1} + a_n)^2.$$
   Оттука следува
$$5a_na_{n+1} - (a_n + a_{n+1})^2 = 5a_{n-1}a_n - (a_{n-1} + a_n)^2 = ... = 5a_1a_2 - (a_1 + a_2)^2 = 500.$$
   Според тоа,
$$1 + 5a_na_{n+1} = (a_n + a_{n+1})^2 + 501$$
   е меѓу $(a_n + a_{n+1})^2$ и $(a_n + a_{n+1} + 1)^2$ ако $a_n + a_{n+1} > 250$, т.е. за $n \geq 4$, бидејќи $a_3 = 70, a_4 = 180, a_5 = 470$, па тогаш не е точен квадрат. Со проверка за $n = 1, 2, 3$ добиваме дека $1 + 5a_na_{n+1}$ е точен квадрат само за $n = 3$ и тогаш
$$1 + 5a_3a_4 = 1 + 5 \cdot 70 \cdot 180 = 250^2 + 501 = 251^2.$$
   Втор начин. Со индукција лесно се докажува дека за секој n исполнето равенството $a_{n+1}^2 - 3a_na_{n+1} + a_n^2 = -500$ т.е. равенството
$$1 + 5a_na_{n+1} = (a_n + a_{n+1})^2 + 501.$$
   Сега од претхопдното равенство следува дека ако $1 + 5a_na_{n+1} = t^2$, тогаш $t^2 - A^2 = 501$, каде $A = a_n + a_{n+1}$. Но, низата $\{a_n\}_{n\geq 1}$ строго монотоно расте (Докажи!), па затоа t и A се позитивни броеви. Според тоа, тие се решенија на системот $t - A = 1, t + A = 501$ или $t - A = 3, t + A = 167$, од каде добиваме

$t = 251$ или $t = 85$. Според тоа, треба да провериме за кое n важи

$$1 + 5a_n a_{n+1} = 251^2 \text{ или } 1 + 5a_n a_{n+1} = 85^2 .$$

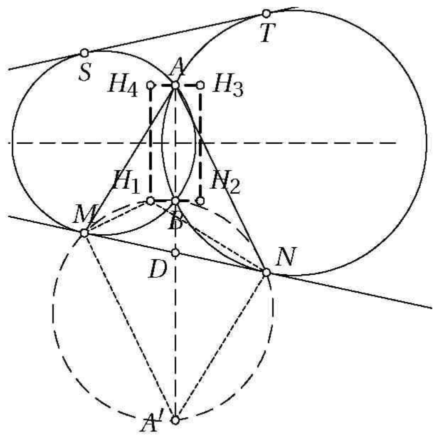
За $n = 1$ и $n = 2$ ниту едно од равенствата не е точно, а $1 + 5a_3 a_4 = 251^2$ и како низата строго монотоно расте заклучуваме дека $n = 3$ е единствено решение на задачата.

3. Кружниците C_1 и C_2 имаат различни радиуси и се сечат во точките A и B. Нека MN и ST, ($M, S \in C_1, N, T \in C_2$) се заедничките тангенти на C_1 и C_2. Докажи, дека ортоцентрите на триаголниците AMN, AST, BMN и BST се темиња на правоаголник.

Решение. *Прв начин.* Со H_1, H_2, H_3, H_4 соодветно да ги означиме центрите на триаголниците $AMN,\ AST, BMN, BST$. Точките H_3 и H_4 се соодветно симетрични на точките H_2 и H_1 во однос на правата l која минува низ центрите на кружниците C_1 и C_2. Затоа доволно е да се докаже дека $H_1H_2 \perp AB$.

Точката $D = AB \cap MN$ е средина на отсечката MN бидејќи

$$\overline{DM}^2 = \overline{DA} \cdot \overline{DB} = \overline{DN}^2$$



(степен на точка во однос на дадените кружници). Ако A' е точка таква што $AMA'N$ е паралелограм, тогаш $\measuredangle H_1MA' = \measuredangle H_1NA' = 90^\circ$, т.е. точките M и N лежат на кружница γ со дијаметар H_1A'. Понатаму, и точката B лежи на γ бидејќи

$$\overline{DB} \cdot \overline{DA'} = \overline{DB} \cdot \overline{DA} = \overline{DM} \cdot \overline{DN} .$$

Оттука следува дека $\measuredangle H_1BA' = 90^\circ$.

Аналогно, $\measuredangle H_2BA' = 90^\circ$, па затоа $B \in H_1H_2 \perp AB$.

Втор начин. Ќе го користиме следново тврдење: *Во секој остроаголен триаголник растојанието од дадено теме до ортоцентарот на триаголникот е еднакво на спротивната страна помножена со котангенсот на аголот при даденото теме.*

Нека H_1 и H_2 се ортоцентрите на триаголниците MNA и MNB, соодветно. Тогаш A е ортоцентар на триаголникот MNH_1 и затоа

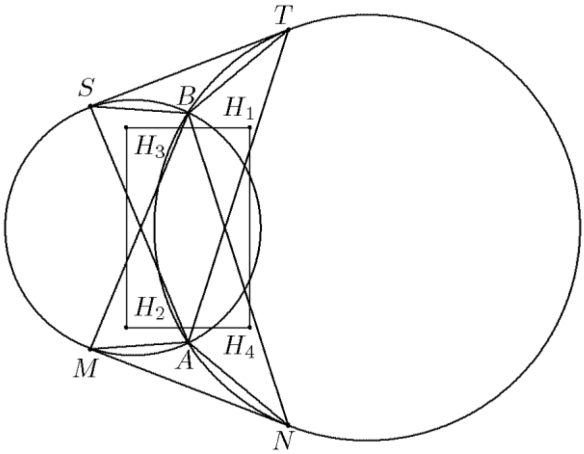
$$\overline{H_1A} = \overline{MN} \operatorname{ctg} \measuredangle MH_1N \text{ и } \overline{H_2B} = \overline{MN} \operatorname{ctg} \measuredangle MBN .$$

Бидејќи MN е тангента и на двете кружници, важи $\measuredangle NMA = \measuredangle MBA$ и $\measuredangle MNA$

$=\measuredangle NBA$. Тоа значи дека $\measuredangle MAN+\measuredangle MBN=180^\circ$. Но, $\measuredangle MAN+\measuredangle MH_1N=180^\circ$, па затоа $\measuredangle MBN=\measuredangle MH_1N$. Според тоа,

$$\overline{H_1A}=\overline{MN}\operatorname{ctg}\measuredangle MH_1N=\overline{MN}\operatorname{ctg}\measuredangle MBN=\overline{H_2B},$$

па како $H_1A \parallel BH_2$, заклучуваме дека H_1BH_2A е паралелограм.



Според тоа, средината на H_1H_2 се совпаѓа со средината на AB. Аналогно, ако H_3 и H_4 соодветно се ортоцентрите на $\triangle AST$ и $\triangle BST$, тогаш средината на H_3H_4 се совпаѓа со средината на AB. Од досега изнесеното следува дека отсечките H_1H_2 и H_3H_4 имаат заедничка средина, што значи дека четириаголникот $H_1H_3H_2H_4$ е паралелограм Останува да забележиме дека отсечките H_1H_2 и H_3H_4 се симетрични во однос на правата која минува низ центрите на двете кружници. Според тоа, четириаголникот $H_1H_3H_2H_4$ е паралелограм со еднакви дијагонали, па затоа тој е правоаголник.

4. Определи ги сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такви што за секој $n\in\mathbb{N}$ важи

$$2n+2001\le f(f(n))+f(n)\le 2n+2002.$$

Решение. *Прв начин*. Функцијата $f(n)=n+667$ ги задоволува условите на задачата.

За даден $n\in\mathbb{N}$, дефинираме низа $\{a_k\}$ со $a_0=n$ и $a_{k+1}=f(a_k),\ k\ge 0$. Ако означиме $b_k=a_{k+1}-a_k-667-\frac{1}{6}$, тогаш од условот на задачата следува

$$-\tfrac{1}{2}\le c_k=b_{k+1}+2b_k\le\tfrac{1}{2}.$$

Бидејќи

$$b_m=(-2)^m b_0+\sum_{k=0}^{m-1}(-2)^{m-1-k}c_k \quad \text{и}$$

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + 667 + \sum_{m=0}^{n-1} b_m = a_0 + 667 + \sum_{m=0}^{n-1} (-2)^m b_0 + \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{m=k+1}^{n-1} (-2)^{m-1-k} c_k \\ &= a_0 + 667 + \tfrac{1-(-2)^n}{3} b_0 + \sum_{k=0}^{n-2} \tfrac{1-(-2)^{n-k-1}}{3} c_k \\ &\le a_0 + 667 + \tfrac{1-(-2)^n}{3} (b_0 + \tfrac{(-1)^{n-1}}{2}), \end{aligned}$$

мора да важи $a_n < 0$ за некој n ако $|b_0| > \frac{1}{2}$. Но, според условот на задачата важи $a_n > 0$, за секој n, па затоа

$$-\tfrac{1}{2} \le b_0 = f(n) - n - 667 - \tfrac{1}{6} \le \tfrac{1}{2},$$

од каде заклучуваме дека $f(n) = n + 667$.

Втор начин. Нека функцијата f ги задоволува условите на задачата. Прво ќе докажеме дека $f(n) > n$ за секој $n \in \mathbb{N}$. Да го претпоставиме спротивното, т.е. дека постои m таков што $f(m) \le m$ и нека $k = f(m)$ е возможно најмалиот. Очигледно $k < m$ и ако $l = f(k)$, тогаш

$$k + l \ge 2m + 2001 \text{ и } f(l) + l \le 2k + 2002.$$

Според тоа,

$$2k + 2002 \ge f(l) + 2m + 2001 - k \text{, т.е. } f(l) \le 3k - 2m + 1 < k,$$

што е противречност. Според тоа, функцијата $g(n) = f(n) - n$ е позитивна. Ако $g(p)$ е нејзината најмала вредност и $q = g(p) + p$, од условот следува дека

$$2g(p) + g(q) \ge 2001 \text{ и } 2g(q) + g(g(q) + q) \le 2002,$$

па затоа

$$4g(p) \ge 4002 - 2g(q) \ge 2000 + g(g(q) + q) \ge 2000 + g(p) \text{, т.е. } g(p) \ge 667.$$

Сега, од неравенството $2g(n) + g(g(n) + n) \le 2002$ скледува $g(n) = 667$, т.е. $f(n) = n + 667$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Лесно се проверува дека оваа функција ги задоволува условите на задачата.