ЈБМО 2001

1. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$a^3+b^3+c^3=2001.$$
Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a \le b \le c$. Од $13^3=2197>2001=a^3+b^3+c^3$ следува $c<13$. Понатаму, $3c^3 \ge a^3+b^3+c^3=2001$, па затоа $c^3>667$, т.е. $c>8$. Значи, $c \in \{9,10,11,12\}$.

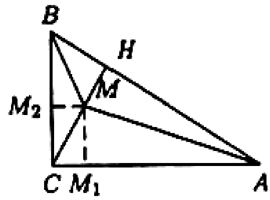
   1) Ако $c=9$, тогаш $a^3+b^3=1272$. Сега, од $11^3=1331>1272=a^3+b^3$ следува $b<11$, а од $2b^3 \ge a^3+b^3=1272$ следува $b^3>636$, т.е. $b>8$. Значи, $b \in \{9,10\}$. За $b=9$ добиваме $a^3=543$, а за $b=10$ добиваме $a^3=272$, т.е. добиваме равенки кои немаат решенија во множеството природни броеви.
   2) Ако $c=10$, тогаш $a^3+b^3=1001$. На потполно аналоген начин како во 1) се добива дека $b<11$ и $b>7$. Според тоа, $b \in \{8,9,10\}$. За $b=8$ добиваме $a^3=489$, за $b=9$ добиваме $a^3=272$ и за $b=10$ добиваме $a^3=1$. Јасно, во множеството природни броеви има решение само последната равенка, при што $a=1$, па едно решение на задачата е подредената тројка $(1,10,10)$.
   3) Ако $c=11$, тогаш $a^3+b^3=670$. Аналогно како во 1) заклучуваме дека $b<9$ и $b>6$. Според тоа, $b \in \{7,8\}$. За $b=7$ добиваме $a^3=323$, а за $b=8$ добиваме $a^3=158$, при што и во двата случаја добиените равенки немаат решенија во множеството природни броеви.
   4) Ако $c=12$, тогаш $a^3+b^3=273$. Аналогно како во 1) заклучуваме дека $b<7$ и $b>5$. Според тоа, $b=6$ и $a^3=57$ и последната равенка нема решение во множеството природни броеви.

   Конечно, сите решенија на задачата се: $(1,10,10)$, $(10,1,10)$ и $(10,10,1)$.

2. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\measuredangle ACB=90^\circ$, $\overline{AC} \ne \overline{BC}$. Точките L и H припаѓаат на страната AB и се такви што $\measuredangle ACL=\measuredangle LCB$, а CH е висина на AB. Докажи:
а) за секоја точка X на отсечката CL важи $\measuredangle XAC \ne \measuredangle XBC$,

б) за секоја точка X на отсечката CH важи $\measuredangle XAC \neq \measuredangle XBC$.

Решение. а) Нека претпоставиме дека точката $M \in CL$ е таква што $\measuredangle MAC = \measuredangle MBC$. Но, $\measuredangle ACL = \measuredangle LCB$, па затоа $\measuredangle AMC = \measuredangle BMC$, што значи дека $\triangle AMC \sim \triangle BMC$. Бидејќи овие триагоници имаат заедничка страна MC добиваме дека $\triangle AMC \cong \triangle BMC$. Последното значи $\overline{AC} = \overline{BC}$ што противречи на условот на задачата. Конечно од добиената противречност следува точноста на тврдењето.



б) Нека претпоставиме дека постои точка $M \in CH$ таква што важи $\measuredangle MAC = \measuredangle MBC$. Нека M_1 M_2 се подножјата на нормалите соодветно повлечени од M на AC и BC (цртеж десно). Триаголниците AMM_1 и MBM_2 се правоаголни и $\measuredangle M_1AM = \measuredangle MBM_2$, па затоа $\triangle AMM_1 \sim \triangle MBM_2$. Според тоа

$$\overline{M_1M} : \overline{M_2M} = \overline{AM} : \overline{BM} \quad . \qquad (1)$$

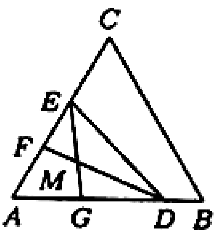
Исто така, триаголниците CMM_2 и ABC се правоаголни и важи $\measuredangle MCM_2 = \measuredangle CAB$ (агли со нормални краци), па затоа $\triangle CMM_2 \sim \triangle ABC$. Според тоа

$$\overline{M_2M} : \overline{M_2C} = \overline{BC} : \overline{AC} \quad . \qquad (2)$$

Но, $\overline{M_1M} = \overline{M_2C}$, па затоа од (1) и (2) следува $\overline{AM} : \overline{AC} = \overline{BM} : \overline{BC}$. Но, важи и $\measuredangle MAC = \measuredangle MBC$, па затоа $\triangle AMC \sim \triangle BMC$. Оттука следува $\measuredangle BCM = \measuredangle ACM$, па затоа $\overline{AC} = \overline{BC}$ што противречи на условот на задачата. Конечно од добиената противречност следува точноста на тврдењето.

3. Дден е рамностран $\triangle ABC$. Нека D и E се произволни точки на страните AB и AC, соодветно. Ако DF и EG се симетрали на аглите на $\triangle ADE$, каде $F \in AE$ и $G \in AD$, докажи дека збирот на плоштините на $\triangle DEF$ и $\triangle DEG$ не е поголем од плоштината на $\triangle ABC$. Кога важи знак за равенство?

Решение. Нека DF и EG се сечат во точката M (цртеж десно). Од условите на задачата следува $\measuredangle DME = \measuredangle GMF = 120^\circ$, па затоа четириаголникот $AGMF$ е тетивен. Според тоа, $\measuredangle GFM = \measuredangle GAM$ и $\measuredangle FGM = \measuredangle FAM$, како периферски агли над иста



тетива. Бидејќи DF и EG се симетрали на агли, заклучуваме дека и AM е симетрала на агол, т.е. $\measuredangle FAM = \measuredangle GAM$, па затоа $\measuredangle GFM = \measuredangle FGM$ и $\triangle FGM$ е рамнокрак, т.е. $\overline{FM} = \overline{MG}$.

Понатаму, нека точката $N \in ED$ е таква што $\measuredangle NME = 60^\circ$. Тогаш $\measuredangle DMN = 60^\circ$. Бидејќи $\measuredangle GMF = 120^\circ$, добиваме $\measuredangle FME = \measuredangle DMG = 60^\circ$. Бидејќи триаголниците FME и MNE имаат аедничка страна EM и два еднакви налегнатаи агли, тие се складни. Слично и триаголниците DMG и DNM се складни. Оттука следува дека

$$P_{\triangle MDE} = P_{\triangle NME} + P_{\triangle DNM} = P_{\triangle FME} + P_{\triangle DGM},$$

$$P_{\triangle DEF} = P_{\triangle MDE} + P_{\triangle MEF} \text{ и } P_{\triangle DEG} = P_{\triangle MDE} + P_{\triangle MGD}.$$

Со собирање на овие равенства добиваме

$$P_{\triangle DEF} + P_{\triangle DEG} = 3P_{\triangle MDE}.$$

На крајот, бидејќи еден од аглите $\measuredangle DEA$ или $\measuredangle EDA$ на триаголникот ADE мора да е помал од 60°, нека тоа е $\measuredangle DEA$. Тогаш $\overline{AD} \geq \overline{DE}$ (наспроти поголем агол на триаголникот ADE се наоѓа поголема страна). Но, $\overline{AB} \geq \overline{AD}$, па затоа

$$\overline{AB} \geq \overline{DE}. \tag{1}$$

Понатаму,бидејќи точката M е центар на кружницата впишана во триаголникот ADE со радиус r', добиваме $P_{\triangle MDE} = \frac{1}{2}\overline{DE} \cdot r'$. Нека r е радиусот на кружницата впишана во триаголникот ABC. Тогаш

$$r' \leq r. \tag{2}$$

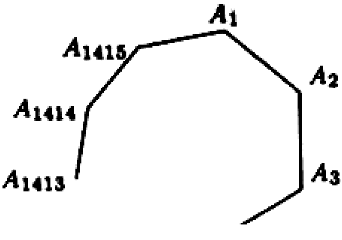
Користејќи ги (1) и (2) добиваме

$$P_{\triangle DEF} + P_{\triangle DEG} = 3P_{\triangle MDE} = \frac{3}{2}\overline{DE} \cdot r' \leq \frac{3}{2}\overline{AB} \cdot r = P_{\triangle ABC},$$

Од (1) и (2) следува дека знак за равенство важи ако и само ако $\overline{DE} = \overline{AB} = \overline{BC}$ и $r = r'$, т.е. во случај кога $D \equiv B$ и $E \equiv C$.

4. Даден е конвексен многуаголник со 1415 страници и периметар $2001\,cm$. Докажи дека постојат три темиња на овој многуаголник кои формираа триаголник со плоштина помала од $1\,cm^2$.

Решение. Триаголниците можеме да ги разгледуваме на следниов начин: $A_1A_2A_3, A_2A_3A_4, ... A_{1414}A_{1415}A_1, A_{1415}A_2A_1$ (цртеж десно). Нека претпоставиме дека плоштината на секој од нив не е помала



од 1. За било кој триаголник со должини на страни a и bважи $2P = ah_a \le ab$. Ова својство да го примениме на секој од воочените триаголници. Добиваме

$$\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_2A_3} \ge 2,\ \overline{A_2A_3} \cdot \overline{A_3A_4} \ge 2, ...,\ \overline{A_{1415}A_1} \cdot \overline{A_1A_1} \ge 2.$$

Ако го примениме неравенството $a + b \ge 2\sqrt{ab}$, добиваме

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} \ge 2\sqrt{2},\ \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_4} \ge 2\sqrt{2}, ...,\ \overline{A_{1415}A_1} + \overline{A_1A_1} \ge 2\sqrt{2}.$$

Последните неравенства ги собираме и добиваме

$$2(\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_4} + \overline{A_{1415}A_1} \ge 1415 \cdot 2\sqrt{2},$$

па затоа за периметарот O важи $O \ge 1415\sqrt{2} > 2001$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.