II олимпијада

1. Определи ги сите трицифрени броеви кои при делење со 11 даваат број кој е еднаков на збирот на квадратите на цифрите на бараниот број.

Решение. Бараниот број е трицифрен и е делив со 11, па може да се запише во облик $11u$ каде $10 \le u \le 90$, $u \in \mathbb{N}$.

Нека $u = 10a + b$, $a \in \{1, 2, ..., 9\}, b \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$. Ќе разгледаме два случаја.

1° Ако $a + b < 10$, тогаш бараниот број е од облик

$$11 \cdot (10a + b) = 100a + 10(a + b) + b$$

и од условот на задачата следува

$$a^2 + (a + b)^2 + b^2 = 10a + b \text{ или } 2(a^2 + b^2 + ab - 5a) = b,$$

што значи дека b мора да е парен број т.е. $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Со непосредна проверка добиваме дека единствено решение е $a = 5$, $b = 0$, т.е. едно решение на задачата е 550.

2° Ако $a + b \ge 10$, тогаш бараниот број е

$$11 \cdot (10a + b) = 100(a + 1) + 10(a + b - 10) + b$$

и од условот на задачата имаме

$$(a + 1)^2 + (a + b - 10)^2 + b^2 = 10a + b \text{ или } 2(a^2 + b^2 + ab - 14a - 10b + 50) = b - 1,$$

па затоа b мора да биде непарен број т.е. $b \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Со непосредна проверка добиваме дека единствено решение е $a = 7$, $b = 3$, т.е. во овој случај решение на задачата е 803.

Значи, единствени броеви кои ги задоволуваат условите од задачата се 550 и 803.

2. Реши ја неравенката

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x + 9, \; x \in \mathbb{R}.$$

Решение. Изразот на левата страна е дефиниран за $x \ge -\frac{1}{2}$ и $x \ne 0$. Понатаму,

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{2x-1})^2} = \frac{4x^2}{(1-\sqrt{2x-1})^2} \cdot \frac{(1+\sqrt{2x+1})^2}{(1+\sqrt{2x+1})^2} = (1 + \sqrt{2x+1})^2.$$

па затоа за $x \ge -\frac{1}{2}$ и $x \ne 0$ затоа дадената неравенка последователно е еквивалентна со неравенката

$$(1 + \sqrt{2x+1})^2 < 2x + 9.$$

Бидејќи функцијата $f(x) = (1 + \sqrt{2x+1})^2 - 2x - 9 = 2\sqrt{2x+1} - 7$ е растечка за $x \ge -\frac{1}{2}$ и $x \ne 0$ и важи $f(\frac{45}{8}) = 0$, решение на неравенката е множеството

$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, -\tfrac{1}{2} \le x < \tfrac{45}{8}, x \ne 0\}.$$

3. Даден е правоаголен триаголник ABC со хипотенуза BC со должина a, која е поделена на n еднакви делови (n е непарен број). Нека α е аголот под кој од точката A се гледа оној од $n-$те делови на хипотенузата кој ја содржи нејзината средина. Докажи дека $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4nh}{(n^2-1)a}$, каде што h е должината на висината на триаголникот повлечена од темето A.

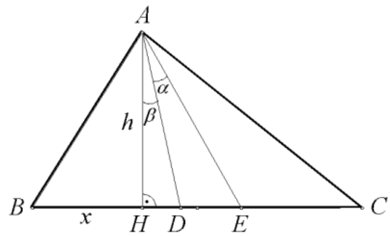
Решение. *Прв начин.* Нека DE е отсечката која ја содржи средината на хипотенузата и $\overline{BH} = x$, каде H е подножната точка на висината спуштена од темето A кон основата BC. Тогаш, $x(a-x) = h^2$. Ако со α и β ги означиме аглите EAD и DAH, добиваме $\measuredangle EAH = \alpha + \beta$.

Од правоаголниот триаголник AHE следува $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\overline{HE}}{\overline{AH}}$. Понатаму,

$$\overline{HE} = \overline{HD} + \overline{DE},\ \overline{HD} = \overline{BD} - \overline{BH} \text{ и } \overline{BD} = \tfrac{n-1}{2n}a,$$

па затоа $\overline{HE} = \frac{n+1}{2n}a - x$. Значи,

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\frac{n+1}{2n}a - x}{h},\quad \operatorname{tg}\beta = \frac{\frac{n-1}{2n}a - x}{h}.$$



Ако го искористиме идентитетот

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta},$$

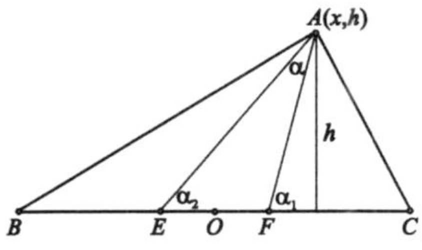
добиваме

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{ah}{nh^2 + \frac{n^2-1}{4n}a^2 - n(ax - x^2)}.$$

Но, $h^2 = x(a-x)$, па затоа $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4nh}{a(n^2-1)}$.

Втор начин. Поставуваме координатен систем со центар во средината O на хипотенузата и $x-$оска хипотенузата BC (цртеж десно), па затоа $B(-\frac{a}{2}, 0)$, $C(\frac{a}{2}, 0)$, $A(x, h)$, $-\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}$ и притоа важи

$$x^2 + h^2 = \frac{a^2}{4}.$$



Точката O е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Ако EF делот од поделбата кој ја содржи точката O, тогаш $\overline{EF} = \frac{a}{n}$ и $E(-\frac{a}{2n}, 0)$ и $F(\frac{a}{2n}, 0)$. За аглите α, α_1 и α_2 важи $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha$, т.е. $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$, па затоа

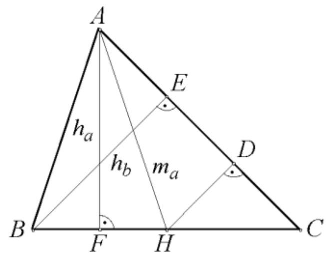
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2}{1+\operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\frac{h}{x-\frac{a}{2n}} - \frac{h}{x+\frac{a}{2n}}}{1-\frac{h}{x-\frac{a}{2n}}\cdot\frac{h}{x+\frac{a}{2n}}} = \frac{4nh}{a(n^2-1)}.$$

При решавањето на задачата прећутно претпоставивме дека $x > \frac{a}{2n}$. Со минимални измени горниот начин на решавање важи и кога $x < \frac{a}{2n}$. Притоа, заради симетрија доволно е да се разгледа само случајот кога $x \geq 0$. За $x = \frac{a}{2n}$, триаголникот AEF е правоаголен и $\operatorname{tg}\alpha$ се пресметува непосредно.

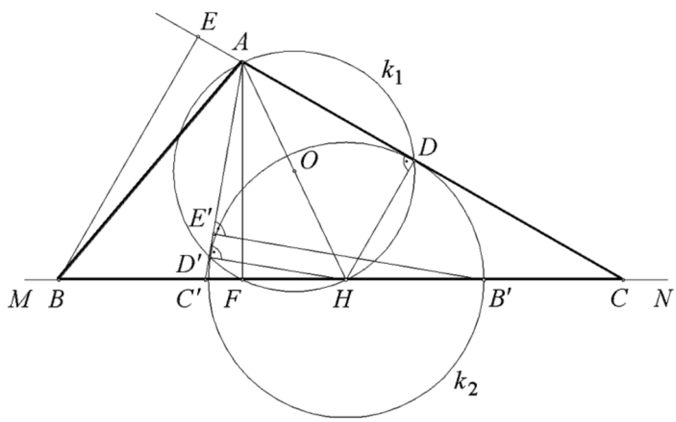
4. Конструирај триаголник ABC ако се познати h_a, h_b и m_a.

Решение. *Анализа.* Нека ABC е триаголникот кој што треба да го конструираме (црт. десно). Од средината H на страната BC повлекуваме нормала HD на AC, а BE и AF се висините повлечени од темињата B и A, соодветно. Според тоа

$$\overline{HD} = \frac{1}{2}\overline{BE} = \frac{1}{2}h_b.$$



Јасно, триаголникот AFH е определен. Точката D се наоѓа во пресекот на кружницата k_1 со дијаметар AH и кружницата k_2 со центар во H и радиус HD. Сега, ако ја знаеме точката D, лесно можеме да ги конструираме останатите темиња на триаголникот.



Конструкција. Повлекуваме права MN и во нејзина точка F ја конструираме висината AF. Опишуваме кружница со радиус m_a и центар во точката A. Таа ја сече правата MN во две точки H и H'. Во пресек на кружниците k_1 и k_2 (со центар во H и H' и радиус $\overline{HD} = \frac{1}{2}h_b$) ги наоѓаме точките D и D'. Точката C е пресек на правите AD и MN. Точката B е симетрична со точката C во однос на точката H. Другото решение го добиваме користејќи ја точката D'. Јасно, постојат уште две решенија кои се складни со веќе конструираните.

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

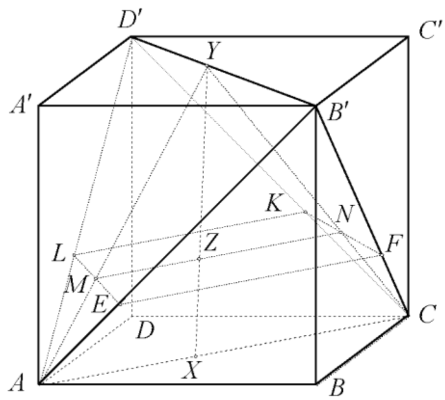
Дискусија. Ако $m_a > h_a$, $\frac{1}{2}h_b < m_a$ и $\frac{1}{2}h_b \neq h_a$, тогаш постојат две различни решенија, а ако $\frac{1}{2}h_b = h_a$ постои само едно решение $(AD \parallel MN)$.

Ако $m_a = h_a$ и $\frac{1}{2}h_b < m_a$ постои само едно решение (два триаголника кои се осносиметрични во однос на правата AF).

5. Дадена е коцка $ABCDA'B'C'D'$.

а) Најди го геометриското место на средините на отсечките XY, каде што X е произволна точка од отсечката AC, а Y е произволна точка од отсечката $B'D'$.

б) Најди го геометриското место на средините Z на отсечките XY за кои што важи $\overline{YZ} = 2\overline{ZX}$.



Решение. *Прв начин.* Ќе го најдеме геометриското место на точки Z од отсечките XY каде X и Y се менуваат на отсечките AC и $B'D'$ такви што $\overline{YZ} = k\overline{XZ}$, $k > 0$.

Ако точката X се совпаѓа со A и Y со B', точката E од дијагоналата AB' за која $\overline{B'E} = k\overline{AE}$, припаѓа на бараното множество. На ист начин ги добиваме точките F, K и L кои припаѓаат на CB', CD' и AD', соодветно. Ако точката Y се движи по $B'D'$, точката Z се движи по $EL \parallel B'D'$. Триаголниците $AB'D'$ и AEL се хомотетични со коефициент на хомотетија $\frac{k}{k+1}$. Исто така, отсечките $EF \parallel AC$, $FK \parallel B'D'$ и $KL \parallel AC$ припаѓаат на бараното геометриско место точки. Бидејќи

$$FK \parallel EL \parallel B'D' \perp AC \parallel EF \parallel KL$$

четириаголникот $EFKL$ е правоаголник. Ќе докажеме дека бараното геометриско место точки е целиот правоголник $EFKL$, заедно со неговите внатрешни точки.

Нека точките X и Y припаѓаат на дијагоналите AC и $B'D'$ соодветно, и нека $Z \in XY$ е точка која ја дели отсечката во однос $\frac{\overline{YZ}}{\overline{XZ}} = k$. Рамнината

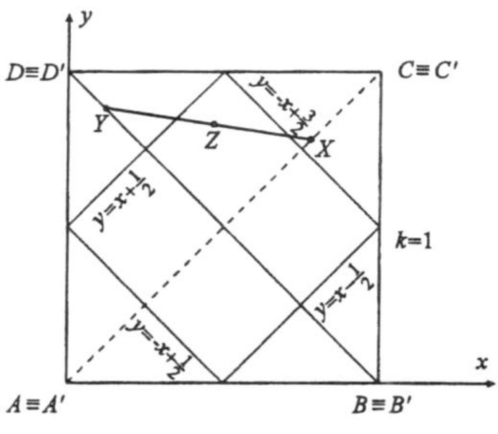
ACY ги сече триаголниците $CD'B'$ и $AB'D'$ во отсечки CY и AY соодветно, а четириаголникот $EFKL$ во отсечка $MN \parallel AC$. Триаголниците YMN и YAC се хомотетични со коефициент на хомотетија $\frac{k}{k+1}$. Отсечката XY ја сече отсечката MN, која е паралелна со AC, во точка Z која ја дели во однос $k = \frac{\overline{YZ}}{\overline{XZ}}$. Но, на отсечката XY постои само една точка која ја дели во тој однос и таа лежи во четириаголникот $EFKL$.

Ќе докажеме дека секоја точка Z од внатрешноста на четириаголникот $EFKL$ припаѓа на некоја отсечка со крајни точки кои припаѓаат на отсечките AC и $B'D'$ и ја дели таа отсечка во однос k. Рамнината ACZ го сече правоаголникот $EFKL$ во отсечка $MN \parallel EF \parallel KL$. Бидејќи Z е внатрешна точка од $EFKL$, правата MN ги сече отсечките EL и FK во внатрешни точки. Таа рамнина ги сече триаголниците $CD'B'$ и $AB'D'$ по отсечки кои лежат во внатрешноста на аглите $B'CD'$ и $D'AB'$, т.е. таа ја сече отсечката $B'D'$ во некоја точка Y. Од $\triangle YMN$ и $\triangle YAC$ се добива $k = \frac{\overline{YZ}}{\overline{XZ}}$.

Бараното геометриско место точки е правоаголникот $EFKL$ чии должини на страни се еднакви на

$$\overline{EL} = \overline{FK} = \tfrac{1}{k+1}\overline{B'D'} = \tfrac{a\sqrt{2}}{k+1} \quad \text{и} \quad \overline{EF} = \overline{KL} = \tfrac{k}{k+1}\overline{AC} = \tfrac{ka\sqrt{2}}{k+1}.$$

Втор начин. а) Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека рабовите на коцката се со должина 1. Нека во правоаголемн координатен систем координатите на темињата на коцката се: $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(1,1,0)$, $D(0,1,0)$, $A'(0,0,1)$, $B'(1,0,1)$, $C'(1,1,1)$ и $D'(0,1,1)$. Гледано од горе проекцијата на коцката и нејзините дијагонали AC и $B'D'$ се прикажани на цртежот десно.



Положбите на точките $X(a,a,0)$ и $Y(b,1-b,1)$ се определени со параметрите $0 \le a,b \le 1$. Средината на отсечката XY е точката $Z(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b+1}{1}, \frac{1}{2})$, па геометриското место на овие точки лежи во рамнината $z = \frac{1}{2}$. Проекцијата на Z во рамнината $z = 0$ е точката $M(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b+1}{1})$. Ако го елиминираме a, односно b од $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{a-b+1}{2}$, добиваме $y = x + \frac{1}{2} - b$, $y = -x + \frac{1}{2} + a$. При фиксирана вредност на b со што е определена точката Y и при промена на $a \in [0,1]$, односно придвижување на X од A до C, средната точка Z лежи на правата $y = x + \frac{1}{2} - b,\ z = \frac{1}{2}$.

Ако a е фиксирано, а b се менува се добива правата $y = -x + \frac{1}{2} + a,\ z = \frac{1}{2}$.

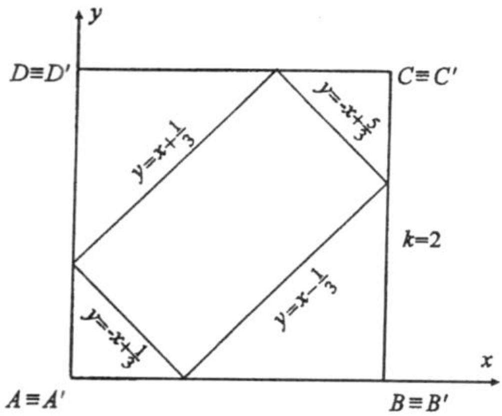
За различни вредности на параметрите a и b се добиваат две фамилии паралелни прави кои лежат меѓу крајните гранични прави кои се добиваат за $b = 0$ и $b = 1$, односно $a = 0$ и $a = 1$:

$$y = x + \frac{1}{2},\ y = x - \frac{1}{2}, \text{ односно } y = -x + \frac{1}{2},\ y = -x + \frac{3}{2}. \qquad (1)$$

Правите од овие две фамилии се ортогонални. Множеството точки кои што припаѓаат на две фамилии прави и коишто го определуваат бараното геометриско место е квадрат во рамнината $z = \frac{1}{2}$ ограничен со правите (1) чија проекција е дадена на горниот цртеж.

б) На ист начин се постапува и во овој случај. Ќе го разгледаме општиот случај: $\overline{YZ} = k\overline{ZX}$, каде k е позитивен реален број. Тогаш

$$\overline{XY} = (k+1)\overline{XZ} \text{ и } \overline{YZ} = \frac{k}{k+1}\overline{XY}. \qquad (2)$$



Ако $X(a,a,0)$ и $Y(b,1-b,1)$, тогаш координатите на $Z(x,y,z)$ се:

$$x - b = \frac{k}{k+1}(a-b),$$
$$y - (1-b) = \frac{k}{k+1}(a-(1-b)),$$
$$z - 1 = \frac{k}{k+1}(0-1),$$

односно

$$x = \frac{1}{k+1}b + \frac{k}{k+1}a,$$
$$y = -\frac{1}{k+1}b + \frac{k}{k+1}a + \frac{1}{k+1},$$
$$z = \frac{1}{k+1}.$$

Со елиминација на b, односно на a се добиваат правите

$$y = -x + \frac{2k}{k+1}a + \frac{1}{k+1},\ \ y = x - \frac{2}{k+1}b + \frac{1}{k+1},$$

кои што лежат во рамнината $z = \frac{1}{k+1}$. Геометриското место на точката Z е правоаголник во рамнината $z = \frac{1}{k+1}$ ограничен со правите

$$y = -x + \frac{1}{k+1},\ \ y = -x + 2 - \frac{1}{k+1},\ \ y = x + \frac{1}{k+1},\ \ y = x - \frac{1}{k+1},.$$

За $k = 2$ се добива бараниот правоаголник (види цртеж), кој е ограничен со правите

$$y=-x+\tfrac{1}{3},\ y=-x+\tfrac{5}{3},\ y=x+\tfrac{1}{3},\ y=x-\tfrac{1}{3}\,. .$$

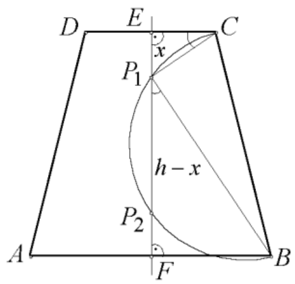
6. Даден е рамнокрак трапез со основи a и b и висина h.

а) Конструирај точка P на оската на симетрија на трапезот од која двата негови крака се гледаат под прав агол.

б) Опредедели го растојанието од точката P до една од основите на трапезот.

в) Определи при кои услови може да се конструира точката P (разгледај ги сите случаи).

Решение. а) Ќе ја користиме познатата теорема, дека геометриско место точки од кои дадена отсечка се гледа под прав агол е кружница чиј дијаметар е дадената отсечка. Значи, констрираме кружница со дијаметар BC над отсечката BC. Таа ја сече оската на симетрија во бараните точки P_1 и P_2 (цртеж десно). .



б) Нека

$$\overline{EP_1}=x,\ \overline{FP_1}=h-x.$$

Тогаш $\triangle BP_1F \sim \triangle P_1CE$ и $\frac{\overline{EP_1}}{\overline{FB}}=\frac{\overline{EC}}{\overline{FP_1}}$, т.е. $x^2-hx+\frac{ab}{4}=0$. Решенија на оваа равенка се $x_{1,2}=\frac{h}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{h^2-ab}$.

в) Ако $h^2>ab$,тогаш постојат две решенија, а ако $h^2=ab$ постои само едно решение (конструираната кружница ја допира оската EF). Ако $h^2<ab$, нема решение (конструираната кружница нема заеднички точки со оската EF).

7. Даден е правилен конус во кој е впишана топка. Околу топката е опишан цилиндар чија основа лежи во рамнината на основата на конусот.

Нека V_1 е волуменот на конусот, а V_2 волуменот на цилиндарот.

а) Докажи дека $V_1\neq V_2$.

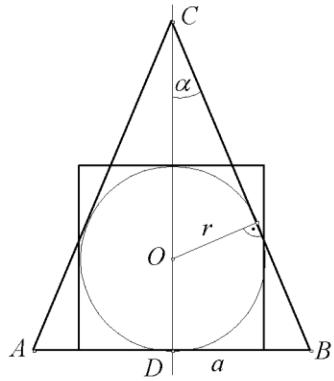
б) Најди го најмалиот број k за кој $V_1=kV_2$, и за вака најденото k конструирај го аголот при темето на оскиниот пресек на конусот.

Решение. Го разгледуваме осниот пресек на конусот, цилиндарот и топката. Нека 2α е аголот при врвот на осниот пресек на конусот, а r е радиусот на топката. Волуменот на конусот е $V_1=\frac{\pi h a^2}{3}$, каде $a=\overline{BD}$ и $h=\overline{CD}$. Бидејќи

$$\overline{CD}=\overline{OC}+\overline{OD}=\frac{r(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha} \quad \text{и} \quad \overline{BD}=\frac{r(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}\operatorname{tg}\alpha$$

добиваме

$$V_1 = \frac{\pi r^3 (1+\sin\alpha)^2}{3\sin\alpha(1-\sin\alpha)} .$$



Волуменот на цилиндарот е $V_2 = 2\pi r^3$ (висината на цилиндарот е $2r$). Нека $k = \frac{V_1}{V_2}$.

Тогаш

$$k = \frac{(1+\sin\alpha)^2}{6\sin\alpha(1-\sin\alpha)}$$

па според тоа

$$(1+6k)\sin^2\alpha + 2(1-3k)\sin\alpha + 1 = 0 .$$

Оваа равенка има решение (по $\sin\alpha$) само во случај кога за нејзината дискриминанта важи $D \geq 0$, т.е. кога $(1-3k)^2 - (1+6k) \geq 0$. Од овде следува $k \geq \frac{4}{3}$.

Според тоа, равенство $V_1 = V_2$ не е можно. За $k = \frac{4}{3}$, добиваме $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ и $\overline{OC} = 3r$. Од претходно изнесеното непосредно следува конструкцијата на аголот при темето на оскиниот пресек на конусот