**Ристо Малчески,**
**Скопје**

# ЛИНЕАРНА ДИОФАНТОВА РАВЕНКА

Со линеарните равенки се среќаваме со започнување на нашето образование. Меѓутоа, во текот на нашето образование скоро и да не се среќаваме со проблеми слични како во следниов пример.

**Пример 1.** При украсување на новогодишната елка Марко за купување на два вида украси потрошил 1000 денари. Цената на првиот вид украси е 60 денари за еден украс, а на вториот вид украси е 110 денари за еден украс. По колку украси од секој вид купил Марко?

Ако со $x$ го означиме бројот на украсите од првиот вид, а со $y$ бројот на украсите од вториот вид, добиваме дека Марко потрошил $60x+110y$ денари, т.е. ја добиваме равенката $60x+110y=1000$. Забележуваме дека коефициентите во оваа равенка се цели броеви и за да дадеме одговор на поставеното прашање треба да најдеме природни броеви $x_0$ и $y_0$ такви што $60x_0+110y_0=1000$, што значи дека равенката треба да ја решиме во множеството природни броеви.

Во нашите разгледувања ќе се задржиме токму на наоѓањето решенија на равенките од видот добиен во пример 1, кои за прв пат во своето дело *Аритметика* ги разработил античкиот математичар Диофант (III век пне) и кои во негова чест се наречени Диофантови равенки. Така ја имаме следнава дефиниција.

**Дефиниција 1.** Нека $a,b,c\in\mathbf{Z}$ и $ab\neq 0$. Линеарната равенка од видот

$$ax+by=c\,, \tag{1}$$

чии решение $(x,y)$ се подредени парови цели броеви ја нарекуваме *линеарна Диофантова равенка со две непознати*.

Во следните разгледувања ќе дадеме одговор на две прашања и тоа:

- Дали линеарната Диофантова равенка (1) има решенија?
- Ако линеарната Диофантова равенка (1) има решенија, како истите да се определат?

Притоа, да забележиме дека, токму барањето решенијата $x$ и $y$ на равенката (1) да се целобројни е клучниот проблем при решавањето на овие равенки. Така, на пример, очигледно е дека равенката $x+y=11$ има бесконечно многу решенија. Меѓутоа, равенката $6x+15y=17$ нема целобројни решенија. Навистина, за секои цели броеви $x$ и $y$ левата страна на последната равенка е делива со 3 и бидејќи

$3 \nmid 17$ заклучуваме дека оваа равенка нема целобројни решенија. Во следната теорема ќе го обопштиме добиениот реззултат за равенката $6x+15y=17$.

**Теорема 1.** Ако $d=\mathrm{NZD}(a,b)$ и $d \nmid c$, тогаш линеарната Диофантова равенка (1) нема решение.

**Доказ.** Ако $d=\mathrm{NZD}(a,b)$, тогаш $a=kd$ и $b=md$, каде $k$ и $m$ се заемно прости броеви. Со замена во (1) добиваме $kdx+mdy=c$, т.е. $d(kx+my)=c$. Според тоа, ако подредениот пар цели броеви $(x_0, y_0)$ е решение на равенката (1) важи $d(kx_0+my_0)=c$, од што следува дека $d \mid c$. Последното противречи на претпоставката дека $d \nmid c$, што значи дека Диофантовата равенка (1) нема решение. ■

Според теорема 1, за да одговориме на првото прашање доволно е да го разгледаме и случајот кога $d \mid c$. За таа цел, ќе ја користиме следнава теорема.

**Теорема 2.** Ако $d=\mathrm{NZD}(a,b)$, тогаш постојат цели броеви $u$ и $v$ такви што $d=au+bv$. ■

Доказот на теорема 2 нема да го презентираме, меѓутоа во следниот пример, користејќи го Евклидовиот алгоритам ќе покажеме како се определуваат броевите $u$ и $v$.

**Пример 2.** За броевите 426 и 312 имаме:

$$426=312\cdot 1+114;\ 312=114\cdot 2+84;\ 114=84\cdot 1+30,$$
$$84=30\cdot 2+24;\ 30=24\cdot 1+6 \text{ и } 24=6\cdot 4$$

што значи $\mathrm{NZD}(426,312)=6$ и за да го запишеме $\mathrm{NZD}(426,312)=6$, користејќи ги горните равенства последователно добиваме:

$$\begin{aligned}6&=30-24=30-(84-2\cdot 30)=3\cdot 30-84=3(114-84)-84=3\cdot 114-4\cdot 84\\&=3\cdot 114-4(312-2\cdot 114)=11\cdot 114-4\cdot 312=11(426-312)-4\cdot 312\\&=11\cdot 426-15\cdot 312,\end{aligned}$$

т.е. $6=426\cdot 11-312\cdot 15$. ■

Следната теорема го комплетира одговорот на првото прашање.

**Теорема 3.** Ако $d \mid c$, тогаш линеарната Диофантова равенка (1) има решение.

**Доказ.** Нека $d \mid c$. Тогаш постои цел број $k$ таков што $c=kd$. Од друга страна, бидејќи $d=\mathrm{NZD}(a,b)$ постојат цели броеви $u$ и $v$ такви што $au+bv=d$. Ако последното равенство го помножиме со $k$, добиваме $aku+bkv=dk$, т.е.

$a(ku)+b(kv)=c$ . Според тоа, подредениот пар $(x_0, y_0)=(ku, kv)$ е решение на равенката (1). ■

Очигледно, доказот на теорема 3 и Евклидовиот алгоритам го даваат и методот за наоѓање на едно решение на линеарната Диофантова равенка (1). Да разгледаме уште еден пример.

**Пример 3.** Во множеството на целите броеви најди едно решение на равенката $13x+32y=5$.

**Решение.** Имаме $a=13$ и $b=32$ . Бидејќи $\mathrm{NZD}(13,32)=1$, од теоремата 3 следува дека равенката има решение. Сега, користејќи го Евклидовиот алгоритам, имаме $32=2\cdot 13+6,\ 13=2\cdot 6+1,\ 6=6\cdot 1$, па затоа

$$1=13-2\cdot 6=13-2\cdot(32-2\cdot 13)=5\cdot 13+(-2)\cdot 32 \text{, т.е. } 5\cdot 13+(-2)\cdot 32=1.$$

Ако последното равенство го помножиме со 5, добиваме $13\cdot 25+32\cdot(-10)=5$, што значи дека едно решение на равенката $13x+32y=5$ е подредениот пар (25, -10). ■

Во претходната теорема одговоривме кога линеарна Диофантова равенка со две непознати има решение, а во пример 3 покажавме како се наоѓа едно нејзино решение. Во следната теорема ќе ги окарактеризираме решенијата на равенката (1) во случај кога истите постојат.

**Теорема 4.** Ако $d=\mathrm{NZD}(a,b)$, $d\,|\,c$ и $(x_0, y_0)$ е едно решение на Диофантовата равенка (1), тогаш сите нејзини решенија се дадени со:

$$x=x_0+\tfrac{b}{d}t\,,\ \ y=y_0-\tfrac{a}{d}t\,,\ \ t=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\dots \qquad (2)$$

**Доказ.** Ако $(x_0, y_0)$ е решение на равенката $ax+by=c$, тогаш со замена на $x=x_0+\frac{b}{d}t$ и $y=y_0-\frac{a}{d}t$ добиваме

$$ax+by=a(x_0+\tfrac{b}{d}t)+b(y_0-\tfrac{a}{d}t)=ax_0+by_0=c \text{, за секој } t=0,\pm 1,\pm 2,\ \dots,$$

т.е. со (2) се дадени решенија на равенката $ax+by=c$ .

Ќе докажеме дека секое решение на равенката $ax+by=c$ е од видот (2). Ако $(x,y)$ е произволно решение на $ax+by=c$ , тогаш последователно добиваме

$$ax+by=ax_0+by_0\,,$$
$$\tfrac{a}{d}(x-x_0)=\tfrac{b}{d}(y_0-y)\,.$$

Од $d=\mathrm{NZD}(a,b)$ следува $\mathrm{NZD}(\frac{a}{d},\frac{b}{d})=1$, па затоа $\frac{a}{d}\,|\,(y_0-y)$ и $\frac{b}{d}\,|\,(x-x_0)$, т.е. $x-x_0=\frac{b}{d}t$ и $y_0-y=\frac{a}{d}t$ , каде што $t$ е цел број. Според тоа, решението $(x,y)$ е од видот (2). ■

**Пример 4.** Во множеството на целите броеви реши ја равенката
$$69x+111y=9000.$$

**Решение.** Бидејќи $\mathrm{NZD}(69,111)=3$, дадената равенка ја делиме со 3 и ја добиваме еквивалентната равенка $23x+37y=3000$. Користејќи го Евклидовиот алгоритам наоѓаме $23\cdot(-8)+37\cdot 5=1$. Последното равенство го множиме со 3000 и добиваме $23\cdot(-24000)+37\cdot 15000=3000$. Конечно, од претходната теорема следува дека сите решенија на Диофантовата равенка $69x+111y=9000$ се дадени со
$$x=-24000+37t,\ y=15000-23t,\ t=0,\pm 1,\pm 2,\dots\ \blacksquare$$

Во претходниот дел видовме кога линеарната Диофантова равенка со две непознати има решение и дадовме постапка за нејзино решавање. Овде ќе презентираме уште еден метод за решавање на ваков тип равенка. Овој метод му припаѓа на швајцарскиот математичар Леонард Ојлер (1707-1783 год.) и затоа е наречен *Ојлеров метод*. Ојлеровиот метод ќе го објасниме со следниот пример.

**Пример 5.** Во множеството на целите броеви реши ја равенката
$$738x+621y=45.$$

**Решение.** Нека $(x,y)$ е решение на дадената равенка. Бидејќи $621<738$, го изразуваме $y$ преку $x$. Ако ги искористиме равенствата $738=621+117$ и $45=0\cdot 621+45$, добиваме
$$y=\tfrac{-738x+45}{621}=-x+\tfrac{-117x+45}{621}.$$
Понатаму, бидејќи $x$ и $y$ се цели броеви добиваме дека и $\tfrac{-117x+45}{621}$ треба да биде цел број, односно $\tfrac{-117x+45}{621}=t$, од што ја наоѓаме равенката $621t=-117x+45$, која има помали коефициенти од почетната равенка. Ја повторуваме постапката и го изразуваме $x$ со помош на $t$. Добиваме
$$x=\tfrac{-621t+45}{117}=-5t+\tfrac{-36t+45}{117},$$
односно $x=-5t+u$, каде што $u=\tfrac{-36t+45}{117}$. Ја повторуваме постапката и го изразуваме $t$ со помош на $u$. Имаме
$$t=\tfrac{-117u+45}{36}=-3u+1+\tfrac{-9u+9}{36}=-3u+1+v,$$
каде што $v=\tfrac{-9u+9}{36}$. Од последното равенство добиваме $u=-4v+1$, $v\in\mathbf{Z}$. Ако сега последователно се вратиме наназад добиваме:
$$t=-3u+1+v=-3(-4v+1)+1+v=13v-2,$$
$$x=-5t+u=-5(13v-2)+(-4v+1)=-69v+11,$$
$$y=-x+t=-(-69v+11)+(13v-2)=82v-13,\qquad v\in\mathbf{Z}.$$

Всушност, со последните две равенства се дадени сите решенија $(x, y)$ на равенката $738x+621y=45$. ■

**Пример 6.** Илија требало да реши 73 задачи за 19 дена. Првите 11 дена тој решавал еднаков број задачи секој ден, а останатите 8 дена повторно решавал еднаков број задачи. Колку задачи решавал Илија секој ден?

**Решение.** Нека бројот на задачите кои ги решавал Илија во секој од првите 11 дена го означиме со $x$, а бројот на задачите кои ги решавал во секој од преостанатите 8 дена со $y$. Од условот на задачата имаме $11x+8y=73$. Бидејќи $\mathrm{NZD}(8,11)=1$, заклучуваме дека последната равенка има решение во множеството на целите броеви.

Ако го искористиме методот на Ојлер, за решението на равенката наоѓаме

$$x=3-8k,\quad y=5+11k,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Од условот на задачата следува дека $x, y\in\mathbf{N}$, а тоа е можно само за $k=0$. Конечно, $x=3, y=5$ е решение на задачата, што значи дека Илија првите 11 дена решавал по 3, а вторите 8 дена по 5 задачи дневно. ■

**Задачи за самостојна работа**

1. Која од наведените Диофантови равенки има решение:
   а) $3x+7y=2002$; б) $30x+25y=174$; в) $3x+15y=1234$.
2. Реши ги Диофантовите равенки:
   а) $48x+7y=5$; б) $11x+30y=31$; в) $21x-12y=72$.
3. На колку начини сметка од 207 денари моѓе да се плати монети од 2 и 5 денари?
4. Продавачот Арсо треба да наполни 99 кг брашно во кеси од по 2, 3 и 5 кг. По колку кеси од секоја тежина ќе наполни Арсо, ако вкупно наполнил 22 кеси?
5. Пекарот Теодор треба да направи 100 векни леб тешки 5, 3 и 0,5 кг. Колку од кои векни леб треба да направи Теодор ако нивната вкупна тежина е 100 кг.
6. Збирот на цифрите на бројот $X$ е $Y$, а збирот на цифрите на бројот $Y$ е $Z$. Ако $X+Y+Z=60$, најди го бројот $X$.

Статијата прв пат е објавена во списанието НУМЕРУС на СММ