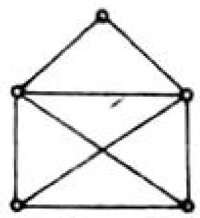
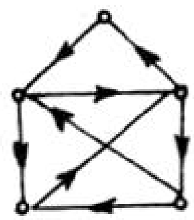
др Љубомир Чукић (Београд)

ЦРТАЊЕ ФИГУРЕ ЈЕДНИМ ПОТЕЗОМ

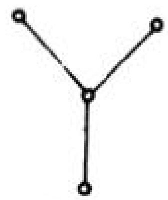
Вероватно сте се већ срели са проблемом: нацртати фигуру на сл. 1а једним потезом, али тако да се не пређе два или више пута преко исте дужи и да се оловка не одваја од хартије. Сигурно сте успели да решите тај проблем; ако нисте, погледајте слику 1б.



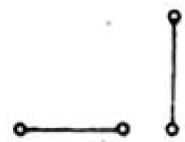
Сл. 1а



Сл. 1б



Сл. 2а



Сл. 2б

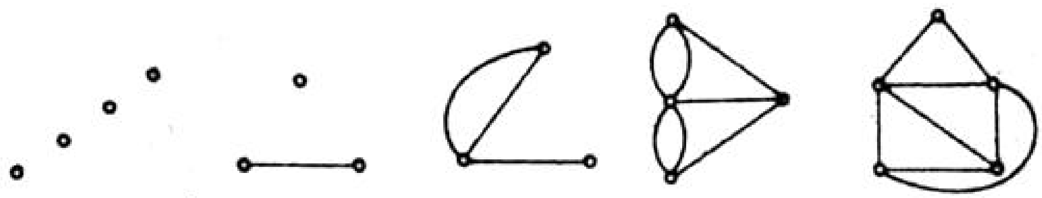
Можемо одмах поставити питање: да ли се свака фигура која је „истог типа“ као фигура на сл. 1а (тј. фигура која се састоји од извесног броја тачака које су спојене дужима) може нацртати једним потезом, тако да се не пређе два или више пута преко исте дужи и да се оловка не одваја од хартије (у даљем једноставно ћемо говорити — нацртати једним потезом)? Одговор је: не, као што показују фигуре на сликама 2а и 2б.

Јасно је да фигура на сл. 2б не може да се нацрта једним потезом, јер је за њено цртање потребно одвојити оловку од хартије. Али зашто фигура на сл. 2а не може да се нацрта једним потезом? Зашто је фигура на сл. 1а могла да се нацрта једним потезом? Које се фигуре могу нацртати једним потезом?

Да бисмо одговорили на ова питања мораћемо да уведемо неке нове појмове: *граф, чвор графа, грана графа, повезан граф* итд.

Фигуру која се састоји од извесног броја тачака које су спојене извесним бројем линија (бројем који може бити и нула) зовемо граф. Неколико примера графова дато је на сликама 3а–3д.

Тачке које се помињу у дефиницији графа зваћемо чворови графа, а линије које спајају чворове графа зваћемо гране графа. Ако из чвора графа „полази“ паран број грана, онда ћемо рећи да је тај чвор *паран*, а ако полази непаран број — рећи ћемо да је то *непаран* чвор. Тако, на сл. 3в чворови A и B су непарни, а чвор C је паран. Граф је повезан ако се од било ког његовог чвора до било ког другог може стићи крећући се само по гранама графа, па, према томе, графови на сликама 3а и 3б нису повезани, а графови на сликама 3в, 3г и 3д јесу.



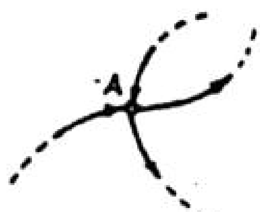
Сл. 3а Сл. 3б Сл. 3в Сл. 3г Сл. 3д

Сада, када смо увели ове појмове, можемо формулисати две теореме које дају одговор на раније постављена питања.

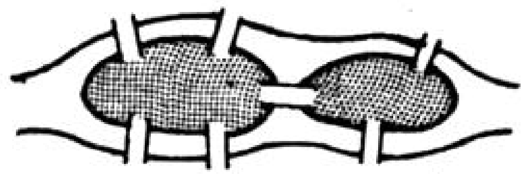
Теорема 1. *Ако се граф може нацртати једним потезом, онда је он повезан и има* 0 *или* 2 *непарна чвора.*

Теорема 2. *Ако повезан граф има* 0 *или* 2 *непарна чвора, онда се он може нацртати једним потезом.*

Претходне две теореме могу се формулисати у следећем облику: *граф се може нацртати једним потезом тада и само тада, када је он повезан и када има* 0 *или* 2 *непарна чвора.* Доказаћемо теорему 1, док ћемо доказ теореме 2 изоставити, због његове сложености.



Сл. 4



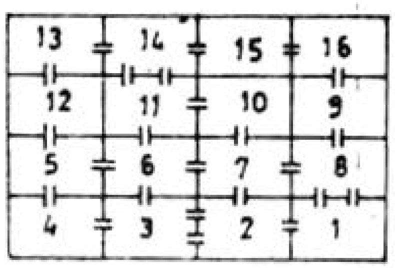
Сл. 5

Нека се граф G (сл. 4) може нацртати једним потезом. Тада он мора бити повезан; у супротном би се оловка морала одвајати од хартије. Нека је A чвор графа G код кога нисмо почели цртање и у коме не завршавамо са цртањем. Приликом цртања смо „ушли“ у чвор A, па смо „изашли“ из њега. Дакле, кад год „уђемо“ у чвор A, морамо и „изаћи“ из њега. Према томе, сваком „проласку“ кроз чвор A одговарају по две гране, тј. чвор A је паран. Значи, сваки чвор графа G код кога нисмо почели цртање и у коме не завршавамо са цртањем, јесте паран. Непаран може бити једино чвор код кога смо почели са цртањем и чвор у коме завршавамо са цртањем. Ако се та два чвора поклапају, онда они представљају паран чвор, а ако се не поклапају, онда су они непарни чворови. Тиме је доказ теореме 1 завршен.

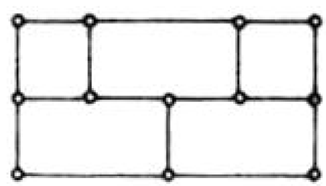
До теореме 1 и теореме 2 први је дошао велики швајцарски математичар Леонард Ојлер, 1736 године. Он је до тих теорема дошао решавајући следећи проблем. Кроз град Кенигсберг протиче река у којој се налазе два острва која су међусобно и са обалом повезана са 7 мостова, сл. 5. Да ли човек може, почевши са једног места, да пређе све мостове само по један пут и да се врати на место свог поласка? Ојлер је доказао да се тај проблем своди на цртање графа на сл. 3г. Из теореме 1 следи да се тај граф не може нацртати једним потезом, па се ни горепоменути мостови не могу прећи на горепоменути начин.

Задаци из следећа три примера решавају се коришћењем теорема 1 и 2, као што ћемо то показати.

Пример 1. Дат је план лавиринта на сл. 6. Доказати да се, полазећи из собе број 1, могу обићи остале собе, тако да се прође кроз сва врата и то само по једном. У којој соби се завршава обилазак?



Сл. 6

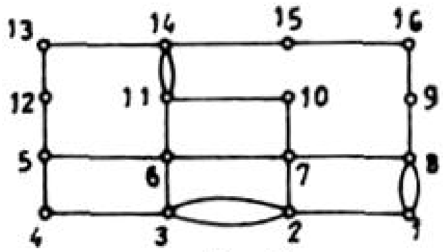


Сл. 7

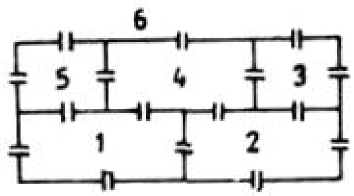
Решење. Сваку собу лавиринта ћемо заменити тачком. Ако између двеју соба постоје врата, онда ћемо спојити тачке које одговарају тим собама. На тај начин добијамо граф на сл. 7. Како он има два непарна чвора (чворови 1 и 5), то се може нацртати једним потезом, по теореми 2 (цртање се може извести на следећи начин: 1, 8, 1, 2, 7, 8, 9, 16, 15, 14, 11, 10, 7, 6, 3, 2, 3, 4, 5, 12, 13, 14, 11, 6, 5). Самим тим, све собе се могу обићи на тражени начин, а обилазак се завршава увек у соби број 5, јер је 5 непаран чвор.

Пример 2. Да ли се може повући непрекидна крива линија која сече сваку дуж фигуре на сл. 8 тачно по једном?

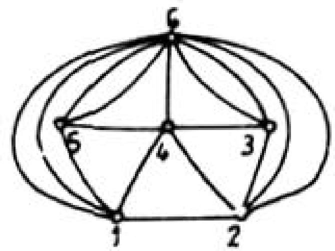
Решење. Лако се види да се овај задатак своди на следећи: обићи све собе куће чији је план дат на сл. 9, тако да се прође кроз сва врата и то само по једном. То није могуће учинити, јер граф који одговара том плану, сл. 10, има четири непарна чвора (чворови 1, 2, 4 и 6), па се не може нацртати једним потезом.



Сл. 8



Сл. 9



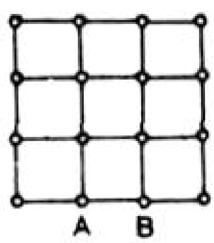
Сл. 10

Пример 3. Доказати да се све улице у Београду могу обићи тако да се кроз сваку улицу прође тачно два пута.

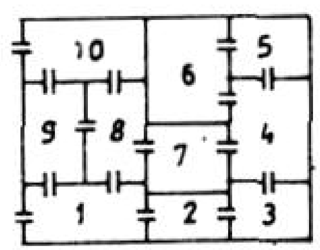
Решење. Ако сваку раскрсницу у Београду заменимо таком, а сваку улицу двема гранама, онда добијамо граф чији су сви чворови парни, па се он може нацртати једним потезом. Онда улицама Београда ходамо тако како смо цртали граф, па ћемо обићи све улице на тражени начин.

Задаци:

1. Доказати да сваки граф има паран број непарних чворова.
2. Наћи најкраћи пут између чворова A и B на сл. 11 који садржи све гране тог графа. Узети у обзир да постоји 8 непарних чворова.



Сл. 11



Сл. 12

3. Дат је план лавиринта на сл. 12. Да ли се могу обићи све собе тог лавиринта, тако да се прође кроз сва врата и то само по једном?

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија