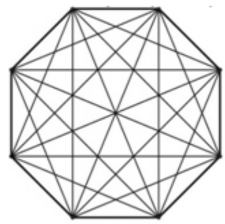
Марија Попоска
Охрид

ПРАВИЛЕН ОСУМАГОЛНИК

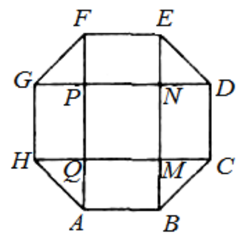
Како што знаеме осумаголникот кај кој сите страни се еднакви и сите агли се еднакви е правилен осумаголник. Понатаму, бројот на дијагоналите на осумаголникот е еднаков на $D_8 = \frac{8(8-3)}{2}20$ (цртеж десно), а неговиот внатрешен агол е $\alpha_8 = 180^\circ - \frac{360^\circ}{8} = 125^\circ$.



1. Плоштина на правилен осумаголник

Задача 1. Определи ја плоштината на правилен осумаголник со должина на страна a.

Решение. *Прв начин*. Нека е даден правилен осумаголник $ABCDEFGH$ со должина на страна a. Ги повлекуваме дијагоналите AF, BE, CH, DG (цртеж десно), со што осумаголникот го поделивме на еден квадрат со страна a, четири рамнокраки правоаголни триаголници со катети

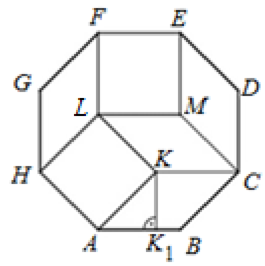


$$GP = FP = DN = EN = CM = BM = AQ = HQ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

и четири правоаголници со страни a и $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Сега, за плоштината на правилниот осумаголник добваме

$$P = a^2 + 4a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} + 4\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{2} = 2a^2 + 2a^2\sqrt{2} = 2a^2(1+\sqrt{2}).$$

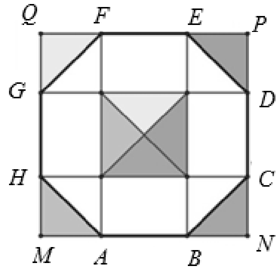
Втор начин. Нека е даден правилен осумаголник $ABCDEFGH$ (цртеж десно). Над страните HA и EF во неговата внатрешност конструираме квадрати $AKLH$ и $EFLM$, па потоа точките K и M ги поврзуваме со темето C. На тој начин осумаголникот го поделивме на два квадрати со должина на страна a и четири складни ромба со должина на страна a и остар агол еднаков на 45°. Ако од



темето K ја повлечеме висината KK_1 во ромбот $ABCD$, тогаш триаголникот AKK_1 е рамнокрак правоаголен со катета a, па затоа од Питагоровата теорема следува дека неговата висина е $KK_1=\frac{a}{\sqrt{2}}$. Конечно, за плоштината на правилниот осумаголник добиваме

$$P=2a^2+4a\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}=2a^2(1+\sqrt{2}).$$

Трет начин. Нека е даден правилнот осумаголник $ABCDEFGH$ со должина на страна a. Ги повлекуваме дијагоналите AF, BE, CH, DG и да го дополниме осумаголникот до квадрат со доцртување на рамнокраките правоаголни триаголници HAM, BCN, EDP, GFQ. Хипотенузата на секој од овие триаголници е еднаква на a, па затоа од Питагоровата теорема следува дека катетите на доцртаните триаголници се еднакви на $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Тоа значи дека должината на страната на добиениот квадрат е еднаква на $a+2\frac{a\sqrt{2}}{2}=a(1+\sqrt{2})$. Конечно, за плоштината на правилниот осумаголник добиваме



$$P=(a(1+\sqrt{2}))^2-4\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}}{2}=a^2(3+2\sqrt{2})-a^2=2a^2(1+\sqrt{2}).$$

Забелешка 1. За квадрат, правилен осумаголник и правилен дванаесетаголник со страна a плоштините се

$$P_4=a^2\ ,\ P_8=2a^2(1+\sqrt{2})\ \text{и}\ P_{12}=3a^2(2+\sqrt{3})\,, \qquad (1)$$

соодветно. На прв поглед меѓу трите дадени формули нема ништо заедничко. Но, дека тоа не е така, доволно е да ја разгледаме формулата

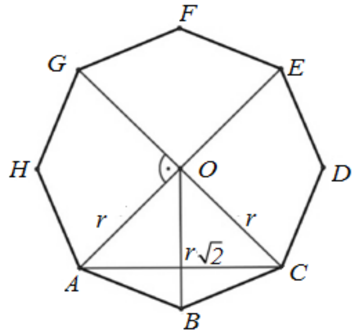
$$P_n=\frac{a^2n}{16}(n+2\sqrt{n}-4).$$

Лесно се гледа дека ако во горната формула замениме $n=4$, $n=8$ и $n=12$, тогаш ги добиваме формулите (1), т.е. формулите за плоштина на квадрат, правилен осумаголник и правилен дванаесетаголник.

Задача 2. Определи ја плоштината на правилен осумаголник со радиус r на опишната кружница околу него.

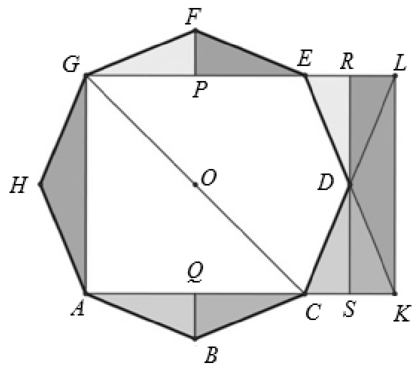
Решение. *Прв начин*. Нека радиусот на опишната кружница околу правилниот осумаголник $ABCDEFGH$ е еднаков на r.

Со повлекување на дијагоналите AE и CG, осумаголникот го делиме на четири складни делтоиди $ABCO, CDEO, EFGO$ и $GHAO$ (цртеж десно). Едната дијагонала на овие делтоиди е еднаква на r, а од Питагоровата теорема следува дека другата дијагонала е еднаква на $r\sqrt{2}$. Според тоа, плоштината на правилниот осумаголник со радиус на опишаната кружница е еднаква на



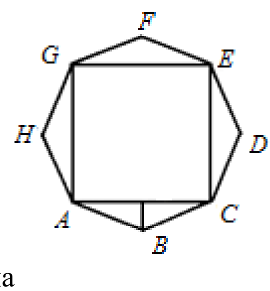
$$P = 4 \cdot \frac{r \cdot r\sqrt{2}}{2} = 2r^2\sqrt{2}.$$

Втор начин. Да ги продолжиме дијагоналите AC и GE на правилниот осумаголник $ABCDEFGH$ до точките K и L така што $AK = GL = 2r$ и да ја повлечеме дијагоналата AG (цртеж десно). Триаголникот ACG е рамнокрак правоаголен со хипотенуза $CG = 2r$ и од Питагоровата теорема следува $AC = AG = r\sqrt{2}$. Лесно се гледа дека според признакот САС триаглниците AGH и KLD се складни. Понатаму, ако во триаголниците GEF, ABC, CKD и LED ги повлечеме висините FP, BQ, DS и DR, добиваме осум складни правоаголни триаголници со должини на катети $\frac{2r - r\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{r\sqrt{2}}{2}$. Затоа плоштината на правилниот осумаголник $ABCDEFGH$ е еднаква на плоштината на правоаголникот $AKLG$ со страни $2r$ и $r\sqrt{2}$, т.е.



$$P = 2r \cdot r\sqrt{2} = 2r^2\sqrt{2}.$$

Трет начин. Во правилниот осумаголник $ABCDEFGH$ ги повлекуваме дијагоналите AC, CE, EG и GA, кои според претходните разгледувања осумаглникот го делат на еден квадрат со должина на страна $r\sqrt{2}$ и четири складни рамнокраки триаголници со основа $r\sqrt{2}$ и висина $\frac{2r - r\sqrt{2}}{2}$. Затоа плоштината на правилниот осумаголник е еднаква на



$$P=(r\sqrt{2})^2+4\frac{r\sqrt{2}\cdot\frac{2r-r\sqrt{2}}{2}}{2}=2r^2+r\sqrt{2}(2r-r\sqrt{2})=2r^2\sqrt{2}\,.$$

Забелешка 2. Најдолгата и најкратката дијагонала на квадратот впишан во кружница со радиус r се еднакви, т.е. $d_4=D_4=2r$. За плоштината на квадратот имаме $P_4=(r\sqrt{2})^2=2r^2$.

Кај правилниот шестаголник вписан во кружница со радиус r најдолгата и најкратката дијагонала се $D_6=2r$ и $d_6=r\sqrt{3}$, а неговата плоштина е $P_6=\frac{3r^2\sqrt{3}}{2}$.

Во правилниот осумаголник вписан во кружница со радиус r најкратката и најдолгата дијагонала се $d_8=r\sqrt{2}$ и $D_8=2r$, а плоштината на правилниот осумаголник е $P_8=2r^2\sqrt{2}$.

Слично, за правилниот дванаесетаголник вписан во кружница со радиус r најдолгата и најкратката дијагонала се $D_{12}=2r$ и $d_{12}=r$, а неговата плоштина е $P_{12}=3r^2$.

На прв поглед, горните формули немаат ништо заедничко. Меѓутоа, ако за дијагоналите d и D на квадратот, правините шестаголник, осумаголни и дванаесетаголник замениме во формулата

$$P_n=\frac{n}{8}d_nD_n\,, \tag{2}$$

добиваме

$$P_4=\frac{4}{8}d_4D_4=2r^2, \qquad P_6=\frac{6}{8}d_6D_6=\frac{3r^2\sqrt{3}}{2},$$

$$P_8=\frac{8}{8}d_8D_8=2r^2\sqrt{2} \text{ и } \qquad P_{12}=\frac{12}{8}d_{12}D_{12}=3r^2.$$

Може да се докаже дека за секој правилен $n-$аголник со парен број страни е точна формулата (2). Обиди се да го докажеш ова тврдење.

Задача 3. Изрази ја должината на страната a на правилниот осумаголник преку должината на радиусот r на опишаната кружница на осумаголникот, и обратно.

Решение. *Прв начин*. Според задачите 1 и 2 за плоштината на правилниот осумаголник изразена преку должината на страната a и преку должината на радиусот на опишаната кружница r имаме

$$P_8=2a^2(1+\sqrt{2}) \text{ и } P_8=2r^2\sqrt{2}\,.$$

Затоа $a^2(1+\sqrt{2})=r^2\sqrt{2}$, од каде добиваме $a=r\sqrt{2-\sqrt{2}}$ и $r=\frac{a}{2}\sqrt{4-2\sqrt{2}}$

Втор начин. Од првиот начин на решавање на задача 2 и од Питагоровата теорема следува

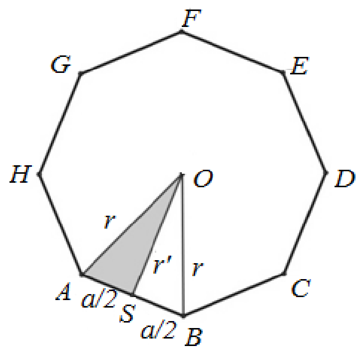
$$a^2=(\tfrac{r\sqrt{2}}{2})^2+(\tfrac{2r-r\sqrt{2}}{2})^2=\tfrac{2r^2+4r^2-4r^2\sqrt{2}+2r^2}{4}=r^2(2-\sqrt{2}),$$

т.е.

$$a=r\sqrt{2-\sqrt{2}} \text{ и } r=\tfrac{a}{2}\sqrt{4-2\sqrt{2}}\,.$$

Задача 4. Определи ја плоштината на правилен осумаголник со радиус на впишаната кружница еднаков на r'.

Решение. Рамнокакиот триаголник ABO има основа a, висина над основата r' и крак r. Од Питагоровата теорема и од задача 3 следува



$$r'=\sqrt{r^2-(\tfrac{a}{2})^2}=\sqrt{r^2-\tfrac{r^2(2-\sqrt{2})}{4}}=\tfrac{r\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\,,$$

т.е.

$$r=\frac{2r'}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}=r'\sqrt{4-2\sqrt{2}}\,.$$

Според тоа,

$$P_8=2r^2\sqrt{2}=2(r'\sqrt{4-2\sqrt{2}})^2\sqrt{2}$$
$$=2r'^2(4-2\sqrt{2})\sqrt{2}=8r'^2(\sqrt{2}-1).$$

Забелешка 3. Плоштините на квадратот, правилниот осумаголник и правилниот дванаесетагоник опишани околу кружница со радиус r' соодветно се

$$P_4=4r'^2,\ P_8=8r'^2(\sqrt{2}-1) \text{ и } P_{12}=12r'^2(2-\sqrt{3})\,. \qquad (3)$$

На прв поглед меѓу трите дадени формули нема ништо заедничко. Но, дека тоа не е така, доволно е да ја разгледаме формулата

$$P_n=\tfrac{n}{4}r'^2\,|\,n-2\sqrt{n}-4\,|\,.$$

Лесно се гледа дека ако во горната формула замениме $n=4$, $n=8$ и $n=12$, тогаш ги добиваме формулите (3), т.е. формулите за плоштина на квадрат, правилен осумаголник и правилен дванаесетаголник изразени преку радиусот на впишаната кружница.

Задача 5. Изрази ја должината на страната a на правилниот осумаголник преку должината на радиусот r' на впишаната кружница во осумаголникот, и обратно.

Решение. За плоштината на правилниот осумаголни изразена преку страната a и преку радиусот на впишаната кружница r' имаме

$$P_8 = 2a^2(1+\sqrt{2}) \text{ и } P_8 = 8r'^2(\sqrt{2}-1).$$

Затоа

$$2a^2(1+\sqrt{2}) = 8r'^2(\sqrt{2}-1), \text{ т.е. } a^2 = 4r'^2(\sqrt{2}-1)^2,$$

од каде добиваме

$$a = 2r'(\sqrt{2}-1) \text{ и } r' = \frac{a}{2}(\sqrt{2}+1).$$

Задача 6. Изрази ја должината на радиусот на опишаната кружница r околу правилниот осумаголник преку должината на радиусот r' на вписаната кружница во осумаголникот, и обратно.

Решение. Во решението на задачата 3 видовме дека $r = r'\sqrt{4-2\sqrt{2}}$ и оттука добиваме $r' = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

Задача 7. Даден е правилен осумаголник $ABCDEFGH$. Ако $AB = a$ и $AD = d$, докажи дека $\frac{d}{a} - \frac{a}{d} = 2$.

Решение. Нека r е радиусот на опишаната кружница околу шестаголникот. Јасно AD е крак на рамнокрак триаголник со основа $r\sqrt{2}$ и висина $\frac{2r+r\sqrt{2}}{2}$, па затоа

$$d^2 = \left(\frac{2r+r\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2 = r^2(2+\sqrt{2}), \text{ т.е. } d = r\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

Сега имаме

$$\frac{d}{a} - \frac{a}{d} = \frac{r\sqrt{2+\sqrt{2}}}{r\sqrt{2-\sqrt{2}}} - \frac{r\sqrt{2-\sqrt{2}}}{r\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{(\sqrt{2+\sqrt{2}})^2-(\sqrt{2-\sqrt{2}})^2}{\sqrt{2^2-\sqrt{2}^2}} = \frac{2+\sqrt{2}-(2-\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = 2,$$

што и требаше да се докаже.

Задача 8. Даден е правилен осумаголник $ABCDEFGH$. Ако $AB = a$, $AC = b$, $AD = c$ и $AE = d$, докажи ги равенствата

а) $bd = 2ac$,

б) $\frac{c}{a} - \frac{d}{b} = 1$, и

в) $\frac{d}{b}-\frac{a}{c}=1$.

Решение. Нека r е радиусот на опишаната кружница околу шестаголникот. Од решенијата на претходните задачи имаме

$$a=r\sqrt{2-\sqrt{2}},\ b=r\sqrt{2},\ c=r\sqrt{2+\sqrt{2}} \text{ и } d=2r.$$

а) Имаме:

$$2ac=2r\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot r\sqrt{2+\sqrt{2}}=2r^2\sqrt{2}=2r\cdot r\sqrt{2}=bd.$$

б) Имаме:

$$\frac{c}{a}-\frac{d}{b}=\frac{r\sqrt{2+\sqrt{2}}}{r\sqrt{2-\sqrt{2}}}-\frac{2r}{r\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}^2}{\sqrt{2^2-\sqrt{2}^2}}-\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{2}}=1.$$

в) Имаме:

$$\frac{d}{b}-\frac{a}{c}=\frac{2r}{r\sqrt{2}}-\frac{r\sqrt{2-\sqrt{2}}}{r\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}^2}{\sqrt{2^2-\sqrt{2}^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1.$$

2. Некои конструкции во врска со правилниот осумаголник

Задача 9. Конструирај правилен осумаголник со даден радиус на опишаната кружница r.

Решение. Оваа конструкција е тривијална. Во кружницата со радиус r повлекуваме дијаметар, а потоа ја повлекуваме неговата симетрала која во пресек со кружницата ги дава другите две темиња на квадратот впишан во оваа кружница. Понатаму, ги повлекуваме симетралите на спротивните страни на квадратот, кои во пресекот со кружницата ги даваат другите четири темиња на правилниот осумаголник.

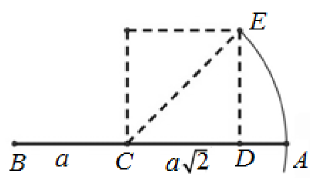
Задача 10. Конструирај квадрат чија плоштина е еднаква на плоштината на правилен осумаголник $ABCDEFGH$ со должина на страна a.

Решение. Според третиот начин на решавање на првата задача за плоштината на правилниот осумаголник изразена преку должината на страната е

$$P_8=2a^2(1+\sqrt{2})=(a(1+\sqrt{2}))^2-a^2.$$

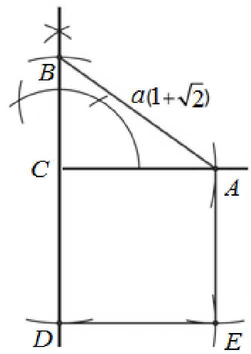
Последното значи, дека бараниот квадрат е квадратот конструиран над едната катета на правоаголен триаголник со хипотенуза $a(1+\sqrt{2})$ и катета a.

За да конструираме отсечка со должина $a(1+\sqrt{2})$ постапуваме на следниов начин. На полуправа Bx нанесуваме отсечка $BC=a$ и во



продолжение отсечка $CD = a$ (цртеж десно). Сега над CD конструираме квадрат и ја наоѓаме дијагоналата CD. Сега, точката A е таква што $CA = CE$. Јасно, важи $BA = a(1+\sqrt{2})$.

Сега да го конструираме бараниот квадрат. Конструираме праоаголен триаголник ABC за кој е дадена катетата $BC = a$ и хипотенузата $BA = a(1+\sqrt{2})$: нанесуваме отсечка $BC = a$, потоа во точката C конструираме нормала на правата BC и темето A го определуваме во пресекот оваа нормала и кружниот лак со центар во B и радиус $a(1+\sqrt{2})$. Конечно, бараниот квадрат е квадратот конструиран над отсечката CA (цртеж десно).

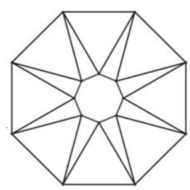


Забелешка 4. Во вториот начин на решавање на задача 2 ние всушност правилниот осумаголник го претворивме во правоаголник со должини на страни $2r$ и $r\sqrt{2}$, т.е. конструиравме правоаголник кој има еднаква плоштина како и правилниот осумаголник впишан во кружница со радиус r.

Задачи за самостојна работа

1. Даден е правилен шестаголник $ABCDEFGH$. Провери дали важи равенството
$$AD^2 - AB^2 = AB \cdot AD.$$

2. Даден е правилен осумаголник. Над неговите страни кон внатрешноста на осумаголникот се конструирани осум рамнострани триаголници (цртеж десно). Докажи дека темињата на овие триаголници кои се во внатрешноста на осумаголникот се темиња на нов правилен осумаголник.



3. Даден е правилен осумаголник. Над неговите страни кон надворешноста на осумаголникот се конструирани осум рамнострани триаголници. Докажи дека темињата на овие триаголници кои се во надворешноста на осумаголникот се темиња на нов правилен осумаголник.

4. Во правилен осумаголник постојат осум точки во кои се сечат по три дијагонали на осумаголникот. Докажи дека овие точки се темиња на правилен осумаголник.

5. Дадена е кружница k за која е означен нејзиниот центар O. Само што помош на шестар на кружницата k означи осум точки кои се темиња на правилен осумаголник.