Сојузен натпревар 1987

Седмо одделение

1. Докажи дека за секој трицифрен број важи следново тврдење: или бројот е делив со 3, или двоцифрен број, односно едноцифрен број, составен од неговите цифри е делив со 3.

   Решение. Ако некоја од цифрите на произволен трицифрен број е делива со 3, тогаш тврдењето на задачата е докажано. Нека претпоставиме дека ниту една од цифрите x, y, z не е делива со 3. Тогаш или остатоците од делењето на цифрите x, y, z се меѓусебно еднакви или кај две цифри остатоците се различни. Ако остатоците се еднакви, тогаш збирот $x+y+z$ е делив со 3, што значи дека бројот е делив со 3. Ако два остатоци, на пример кај цифрите x и y, се различни, тогаш тие во некој редослед се еднакви на 1 и 2, што значи дека збирот $x+y$ е делив со 3, па затоа двоцифрениот број $\overline{xy}$ е делив со 3.

2. Броевите 12 и 60 имаат интересно својство: нивниот производ е еднаков на нивниот десеткратен збир. Определи ги сите такви парови природни броеви.

   Решение. Нека x и y се бараните броеви. Тогаш $xy=10(x+y)$, од каде последователно добиваме
$$xy-10x-10y=0,$$
$$xy-10x-10y+100=100,$$
$$(x-10)(y-10)=100.$$
   Но, $100=1\cdot 100=2\cdot 50=4\cdot 25=5\cdot 20=10\cdot 10$, па од последната равенка лесно се добива дека бараните броеви се: 11 и 110, или 12 и 60, или 14 и 35, или 15 и 30, или 20 и 20.

3. Некој трицифрен број се зголемува за 45 ако цифрите на единиците и десетките ги заменат местата, а истиот број се намалува за 270 ако цифрите на стотките и десетките ги заменат местата. Што ќе се случи со овој број, ако цифрите на единиците и стотките ги заменат местата?

   Решение. Нека $100x+10y+z$ е дадениот трицифрен број. Со замена на местата на цифрите на десетките и едниците добиваме
$$100x+10y+z+45=100x+10z+y, \text{ т.е. } y-z+5=0.$$

Со замена на местата на цифрите на стотките и десетките добиваме

$$100x+10y+z-270=100y+10x+z\text{, т.е. } x-y-3=0.$$

Со собирање на равенствата $y-z+5=0$ и $x-y-3=0$, го добиваме равенството $x-z=-2$. Со замена на местата на цифрите на стотките и единиците добиваме:

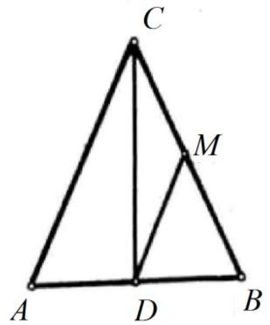
$$100x+10y+z-(100z+10y+x)=99(x-z)=99(-2)=-198,$$

што значи дека бројот ќе се зголеми за 198.

4. Во рамнокрак триаголник ABC со основа AB, отсечката CD е висина спуштена кон основата. Ако M е произволна точка од кракот BC, докажи дека разликата на отсечките CA и CM е поголема од разликата на отсечките DA и DM.

Решение. Од $CA=CB$ следува

$$CA-CM=CB-CM=BM.$$



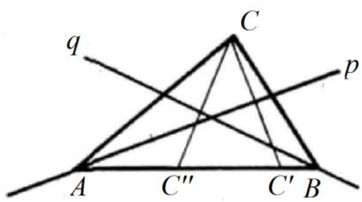
Од триаголникот BDM, според неравенството на триаголник добиваме $BM>|DB-DM|$, цртеж десно. Меѓутоа, CD е висина повлечена кон основата на рамнокракиот триаголниок ABC, па затоа $DA=DB$. Според тоа,

$$CA-CM=BM>|DB-DM|=|DA-DM|,$$

т.е. $CA-CM>|DA-DM|$ што и требаше да се докаже.

5. Дадена се точка C и прави p и q кои се сечат. Конструирај триаголник ABC за кој правата p е симетрала на внатрешниот агол α, а правата q е симетрала на внатрешниот агол β. (Точката C и правите p и q избери ги така што задачата ќе има решение).

Решение. *Анализа*. Нека ABC е триаголникот во кој p и q се симетрали на аглите α и β, цртеж десно. Тогаш точката C', симетрична на C во однос на p припаѓа на правата AB, а на оваа права припаѓа и точката C'', симетрична на C во однос на q.



Конструкција. Ги конструираме точките C' и C'' симетрични на точката C во однос на правите p и q, соодветно. Ја повлекуваме

правата $C'C''$ и во пресекот на оваа права со правите p и q ги наоѓаме темињата A и B.
Доказот непосредно следува од анализата и конструкцијата. Деталите од доказот, како и дискусијата ги оставаме на читателот за вежба.

Осмо одделение

1. За кои вредности на x, y, z изразот $x^2+y^2+z^2-12y-14z+90$ има најмала вредност? Определи ја таа вредност.
Решение. Последователно добиваме
$$x^2+y^2+z^2-12y-14z+90 = x^2+y^2-12y+z^2-14z+90$$
$$= x^2+(y-6)^2+(z-7)^2+5 \geq 5.$$
Според тоа, најмалата можна вредност на дадениот израз е 5 и истата се достигнува за $x=0, y=6, z=7$.

2. Ако $a^2+a+1=0$, определи ја вредноста на изразот
$$a^{1987}+\frac{1}{a^{1987}}.$$
Решение. Ако $a^2+a+1=0$, тогаш $a \neq 1$, па затоа даденото равенство го помножиме со $a-1$ добиваме $(a-1)(a^2+a+1)=0$, т.е. $a^3-1=0$, што значи $a^3=1$. Според тоа, $a^{1987}=(a^3)^{662}a=1^{662}a=1\cdot a=a$, па затоа
$$a^{1987}+\frac{1}{a^{1987}}=a+\frac{1}{a}.$$
Но од условот $a^2+a+1=0$, последователно добиваме $a^2+1=-a$ и ако поделиме со a наоѓаме $a+\frac{1}{a}=-1$. Конечно,
$$a^{1987}+\frac{1}{a^{1987}}=a+\frac{1}{a}=-1.$$

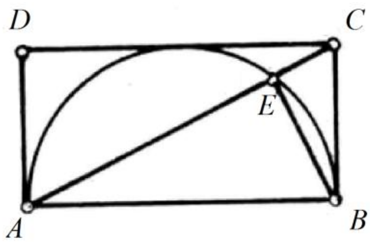
3. Збирот на сите природни броеви од 1 до n е еднаков на трицифрен број со еднакви цифри. Колку природни броеви се собрани?
Решение. Од условот на задачата добиваме
$$1+2+3+...+n=\overline{kkk},$$
$$\frac{n(n+1)}{2}=111k,$$

$$n(n+1)=222k=2\cdot 3\cdot 37k.$$

Левата страна на последното равенство е производ на два последователни броја, а во десната страна еден од множителите е бројот 37, кој е прост број. Според тоа, вториот множител може да биде 36 или 38. Но, бројот 38 не е делив со 3, па затоа вториот множител е 36, при што $k=6$. Значи, $n(n+1)=36\cdot 37$, од каде заклучуваме дека се собрани првите 36 природни броеви и е добиен збирот 666.

4. Во правоаголник $ABCD$ со страни $AB=10\,cm$ и $BC=5\,cm$ е впишана полукружница со дијаметар AB. Во кој однос полукружницата ја дели дијагоналата на правоаголникот?

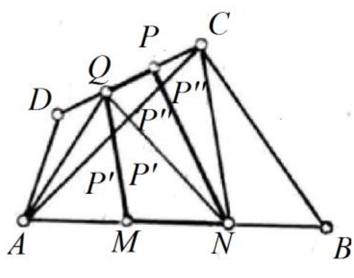
Решение. Нека E е пресечната точка на дијагоналата AC со полкружницата k (цртеж десно). Тогаш $\measuredangle AEB=90^\circ$, како агол над дијаметарот AB. Правоаголните триаголници ABE и BCE се слични, бидејќи имаат еднакви остри агли . Затоа



$$AE:EC=AB:BC=10:5=2:1$$

5. Нека $ABCD$ е произволен конвексен четириаголник со плоштина 3. На страната AB се земени точки M и N такви што $AM=MN=NB$, а на страната CD се земени точки P и Q такви што $CP=PQ=QD$. Докажи дека четириаголникот $MNPQ$ има плоштина 1.

Решение. Триаголниците ANQ и NMQ имаат еднакви основи, $AM=MN$ и заедничка соодветна висина, па затоа имаат еднакви плоштини (на цртежот означени со P'). Од слични причини еднакви се и плоштините на триаголниците CPN и PQN кои се означени со P''.



Според тоа, плоштината на четириаголникот $MNPQ$ е еднаква на $P'+P''$. Ќе докажеме дека збирот на плоштините на триаголниците ADQ и BCN е еднаков на третина од плоштината на четириаголникот $ABCD$, т.е. дека е еднаква на 1. Навистина, триаголникот ADQ има три пати помала основа од триаголникот ACD, па како нивните висини се еднакви добиваме дека $P_{ADQ}=\frac{1}{3}P_{ACD}$. Аналогно се докажува дека $P_{BCN}=\frac{1}{3}P_{ABC}$. Според тоа,

$$P_{ADQ}+P_{BCN}=\frac{1}{3}P_{ACD}+\frac{1}{3}P_{ABC}=\frac{1}{3}P_{ABCD}=1.$$

Според тоа, $P_{ANCQ}=2$, т.е. $2P'+2P''=2$, од каде следува $P'+P''=1$, односно $P_{MNPQ}=P'+P''=1$.