# 5-я Международная Жаутыковская олимпиада, 2009 год

**Задача №1.** Найдите все такие пары целых чисел $(x, y)$, что $x^2 - 2009y + 2y^2 = 0$.

**Задача №2.** Найдите все действительные $a$, для которых существует функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая неравенству

$$x + af(y) \leq y + f(f(x))$$

для всех $x \in \mathbb{R}$. (Здесь $\mathbb{R}$ - множество всех действительных чисел.)

**Задача №3.** Для выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ площади $S$ докажите неравенство

$$AC(BD + BF - DF) + CE(BD + DF - BF) + AE(BF + DF - BD) \geq 2\sqrt{3}S.$$

**Задача №4.** На плоскости выбрана декартова система координат. Точки $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ лежат на параболе $y = x^2$, а точки $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$ лежат на параболе $y = 2009x^2$. Точки $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ лежат на одной окружности, и точки $A_i$ и $B_i$ имеют одинаковые абсциссы при любом $i = 1, 2, 3, 4$. Докажите, что $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$ также лежат на одной окружности.

**Задача №5.** Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle B = \angle D = 90°$. На отрезке $AB$ выбрана такая точка $M$, что $AD = AM$. Лучи $DM$ и $CB$ пересекаются в точке $N$. Точки $H$ и $K$ - основания перпендикуляров, опущенных из точек $D$ и $C$ на прямые $AC$ и $AN$, соответственно. Докажите, что $\angle MHN = \angle MCK$.

**Задача №6.** В клетчатом квадрате $17 \times 17$ $n$ клеток окрашены в черный цвет. Назовем *линией* любой столбец, любую строку и любую из двух диагоналей квадрата. За один шаг, если в некоторой линии есть хотя бы 6 черных клеток, можно окрасить все ее клетки в черный цвет.

Найдите наименьшее такое $n$, что при некотором расположении исходных $n$ черных клеток можно за несколько шагов окрасить все клетки квадрата.