XIII РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

Задачите и решенијата се скенирани од книгата
Регионални натпревари по математика 83-95
Подготвена од Боривое Миладиновиќ

V одделение

1. Колку страници има книга, ако за нејзино нумерирање се употребени 465 цифри?

2. Семејствата А и В имаат по три деца со по два близнаци. Производот од бројот на годините на децата во секое семејство е 36. Збировите од годините на децата во семејствата се еднакви, а семејството А има дете со најмал број години.

3. Одреди четирицифрен број кој поделен со 131 дава остаток 112, а поделен со 132 дава остаток 98.

4. Правоаголникот ABCD има плоштина 96 cm^2. Ако неговата должина се зголеми за 4 cm, а ширината остане иста, тогаш неговата плоштина ќе изнесува 128 cm^2. Пресметај го периметарот на правоаголникот ABCD.

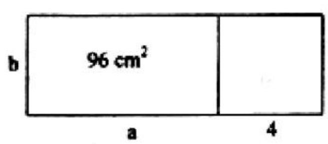
V одделение

1. За нумерирање на првите 9 страници употребени се 9 цифри, а за следните 90 страници $90 \cdot 2=180$ цифри. Преостанатите $465-9-180=276$ цифри се употребени за нумерирање на страници со трицифрени броеви. Нив ги има вкупно $276:3=92$ страници. Книгата има вкупно $9+90+92=191$ страници.

2. Бидејќи производот на годините на децата во секое семејство е 36, близнаци се јавуваат во четири случаи: $1 \cdot 1 \cdot 36$; $1 \cdot 6 \cdot 6$; $2 \cdot 2 \cdot 9$; $3 \cdot 3 \cdot 4$. Збировите на годините се еднакви во два случаи: $1 \cdot 6 \cdot 6$ и $2 \cdot 2 \cdot 9$. Семејството А има дете со најмал број на години, следува дека броевите на годините на децата во семејството А се 1, 6 и 6, а во семејството В се 2, 2 и 9.

3. Бидејќи делителите се разликуваат за 1, а остатоците за 14, следува дека количникот q е еднаков на разликата од остатоците, т.е. $q=112-98=14$. Бараниот број е: $131 \cdot 14+112=132 \cdot 14+98=1946$.

4. Ако со a ја означиме должината на правоаголникот, а со b неговата ширина, тогаш:
$a \cdot b=96$ cm^2 и $96+4b=128$ cm^2. Оттука:
$4b=32$, т.е. $b=8$, а $a=96:8=12$ cm,
$L=2(12+8)=40$ cm.



VI одделение

1. Во една читална има маси со 3 и со 4 ногалки. Околу секоја маса има по 4 столици, а секоја столица има 4 ногалки. Сите маси заедно имаат 39 ногалки, а сите столици 176 ногалки. Колку маси има со 3, а колку со 4 ногалки?

2. Најди природни броеви a и b за кои важи равенството $\frac{a}{6}-\frac{2}{b}=\frac{1}{30}$.

3. Од една точка D од хипотенузата на рамнокрак правоаголен триаголник ($\overline{AC}=\overline{BC}=6$ cm) повлечени се прави $p_1 \parallel AC$ и $p_2 \parallel BC$. Правите ги сечат краците BC и AC соодветно во точките M и N. Одреди го периметарот на четириаголникот CNDM.

4. Во триаголник ABC симетралите на аглите BAC и ABC се сечат во точка M, а $\angle AMB=135^{\circ}$. Најди ја големината на аголот ACB.

VI одделение

1. I - начин: Во читалната има 176:4=44 столици и 44:4=11 маси. Нека има x маси со 4 ногалки, тогаш има 11-x маси со три ногалки, $4x+(11-x)\cdot 3=39$; $4x+33-3x=39$; $x=6$.

Со четири ногалки има 6 маси, а со 3 ногалки има 5 маси.

II - начин: Во читалната има 176:4=44 столици и 44:4=11 маси. Бидејќи сите маси имаат 39 ногалки, следува 39:(4+3)=5 и остаток 4 ногалки. Значи има 5 маси со 3 ногалки и 5+1=6 маси со 4 ногалки.

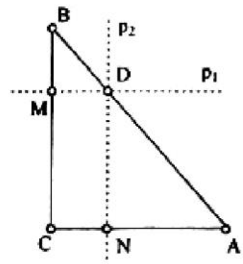
2. Од равенството се заклучува дека: Н.З.С.(6, b)=30, а оттука следува $b\in\{5, 15, 30\}$.

За b=5, имаме: $\frac{a}{6}-\frac{2}{5}=\frac{5a-12}{30}=\frac{1}{30}$, т.е. 5a-12=1, следува дека $a\notin N$, $b\neq 5$.

За b=15, имаме: $\frac{a}{6}-\frac{2}{15}=\frac{1}{30}$, т.е. 5a-4=1, и $a=1\in N$.

За b=30, имаме: $\frac{a}{6}-\frac{2}{30}=\frac{1}{30}$, т.е. 5a-2=1, следува дека $a\notin N$.

Според тоа бараните броеви се a=1 и b=15.



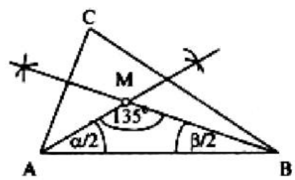
3. Бидејќи $p_1 \parallel AC$, $p_2 \parallel BC$ и $\angle c=90^\circ$, четириаголникот CNDM е правоаголник.

$L=\overline{CN}+\overline{ND}+\overline{DM}+\overline{MC}$. Триаголниците BMD и NDA се правоаголни рамнокраки.

$\overline{ND}=\overline{NA}$ и $\overline{DM}=\overline{MB}$, следува

$L=\overline{CN}+\overline{NA}+\overline{MB}+\overline{MC}$;

$L=\overline{CA}+\overline{CB}=6+6=12$ cm.



4. Нека α и β се аглите во триаголникот за кои се повлечени симетрали. Од ΔABM имаме:

$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=180^\circ-135^\circ=45^\circ$, т.е. $\alpha+\beta=90^\circ$.

Бидејќи $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, следува дека $\gamma=90^\circ$.

VII одделение

1. Докажи дека за секој природен број n, изразот $3^n+3^{n+1}+3^{n+2}$ е делив со 39.

2. Едно буре се полни со вода од една цевка. Ако протокот на водата во цевката се намали за 20%, тогаш за колку проценти ќе се зголеми времето за да се наполни бурето со вода?

3. Рамнокрак трапез ABCD има основа $\overline{AB}=50$ cm и $\overline{CD}=20$ cm, а $\angle BAD=60^\circ$. Пресметај го периметарот на тој трапез.

4. Пресметај ја плоштината на рамнокрак трапез чии дијагонали се взаемно нормални, а средната линија на трапезот е еднаква на 6 cm.

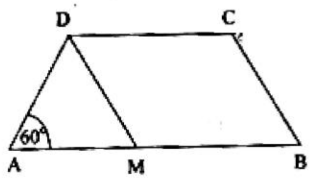
VII одделение

1. Дадениот израз е делив со 39 ако во исто време е делив со 3 и 13, бидејќи 3·13=39.

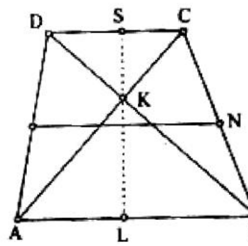
$$3^n+3^{n+1}+3^{n+2}=3^n+3^n\cdot 3+3^n\cdot 3^2=(1+3+9)\cdot 3^n=13\cdot 3^n$$

Според тоа изразот е делив со 13. Изразот е делив и со 3, бидејќи $3^n=\underbrace{3\cdot 3\cdot\ldots\cdot 3}_{n}$. Значи изразот е делив со 3 и 13, т.е. тој е делив со 39.

2. Ако протокот се намали за 20%, тогаш новиот проток е $100\%-20\%=80\%=\frac{4}{5}$ од поранешниот. Ако единица цело (волумен на бурето) се подели со новиот проток се добива времето на полнењето во однос на поранешното време, т.е. $1:\frac{4}{5}=\frac{5}{4}=1,25$. Времето се зголемува во однос на поранешното за 0,25, односно за 25%.

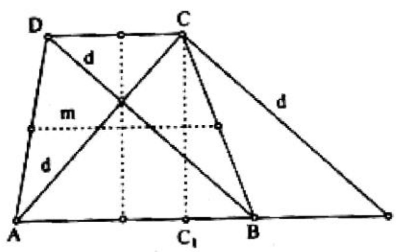


3. Нека DM∥BC, тогаш триаголникот AMD е рамностран, бидејќи $\angle A=\angle M=60^\circ$. Според тоа $\overline{AD}=\overline{AM}=\overline{AB}-\overline{DC}=30$ cm. L=50+20+2·30; L=130 cm.



4. I - начин: Нека $\overline{MN}=6$ cm, а k пресек на дијагоналите. Од складноста на ΔABC и ΔABD, следува $\angle CAB=\angle ABD$, а бидејќи $\angle AKB=90^\circ$, ΔABK е рамнокрак правоаголен. Триаголникот KLB е рамнокрак правоаголен, т.е. $\overline{KL}=\overline{LB}=\frac{1}{2}\overline{AB}$. Од исти причини и ΔDKC е рамнокрак правоаголен; ΔKSC - рамнокрак правоаголен, т.е. $\overline{KS}=\overline{SC}=\frac{1}{2}\overline{DC}$. Според тоа имаме:

$$h=\overline{KL}+\overline{KS}=\frac{\overline{AB}}{2}+\frac{\overline{DC}}{2}=\frac{\overline{AB}+\overline{DC}}{2}=6\text{ cm, и }P=m\cdot h=6\cdot 6=36\text{ cm}^2.$$



II - начин: Плоштината ќе ја пресметаме со трансформирање на трапезот во триаголник кој има иста плоштина. Ако низ темето C повлечеме права паралелна со BD, таа го сече продолжението на AB во точката M. Триаголникот AMC е рамнокрак правоаголен со хипотенуза еднаква на збирот од основите.

$P=\frac{(\overline{AB}+\overline{BM})\cdot\overline{CC_1}}{2}$, бидејќи е $\overline{BM}=\overline{DC}$.

Следува $P=\frac{(\overline{AB}+\overline{DC})\cdot\overline{CC_1}}{2}$; $\overline{CC_1}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{BM})=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{DC})=6$ cm. P=6·6=36 cm^2.

VIII одделение

1. Збирот на четири броја е 229. Ако на првиот му се додаде 1, од вториот се одземе 2, третиот се помножи со 3, а четвртиот се подели со 4 се добиваат еднакви резултати. Кои се тие броеви?

2. Велосипедист кој се движи со брзина од 16 $\frac{km}{h}$, растојанието меѓу местата А и В ќе го помине за еден час побргу отколку ако се движи со брзина од 12 $\frac{km}{h}$. Одреди го растојанието меѓу местата А и В.

3. Во трапез ABCD, основата $\overline{AB} = 12\ cm$, а основата $\overline{CD} = 4\ cm$. Збирот на аглите што лежат на основата AB е 90°. Пресметај ја должината на отсечката MN, ако M е средина на основата AB, а N средина на основата CD.

4. Дијагоналите на четириаголник ABCD се сечат во точката M. Докажи дека производот на плоштините на триаголниците ABM и CDM е еднаков на производот од плоштините на триаголниците DAM и BCM.

VIII одделение

1. Нека a, b, c и d се бараните броеви. Тогаш a+b+c+d=229 и $a+1=b-2=3c=\frac{d}{4}$. Ако броевите c, b и d ги изразиме преку a ќе добиеме: b=a+3; $c=\frac{a+1}{3}$; d=4(a+1).

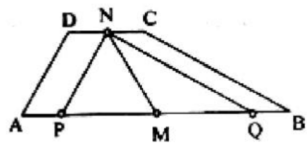
$a+a+3+\frac{a+1}{3}+4(a+1)=229$;   19a=665, т.е.   a=35, b=38, c=12 и d=144.

2. Ако s е растојанието меѓу местата A и B, а t времето за кое го поминал патот се 16 km/h, тогаш имаме:

$t=\frac{s}{v_1}$ и $t+1=\frac{s}{v_2}$. Бидејќи $v_1=16$ km/h, а $v_2=12$ km/h следува: $t=\frac{s}{16}$ и $t=\frac{s}{12}-1$;

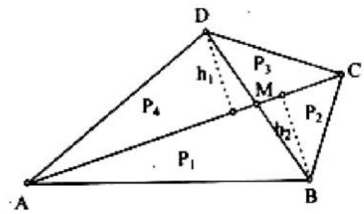
$\frac{s}{16}=\frac{s}{12}-1$. Решавајќи ја равенката добиваме дека s=48 km.

3. Ако низ точката N повлечеме прави паралелни со краците на трапезот добиваме триаголник PQN. Бидејќи ∠A+∠B=90°, а ∠A=∠P и ∠B=∠Q како агли со паралелни краци, следува дека и ∠P+∠Q=90°, т.е. ΔPQN е правоаголен. Отсечката NM е тежишна линија кон хипотенузата.



$\overline{NM}=\frac{1}{2}\overline{PQ}=\frac{1}{2}(12-2-2)=4$ cm.

4. Ако со P_1, P_2, P_3, P_4 ги обележиме соодветно плоштините на триаголниците како на цртежот тогаш имаме :



$P_1=\frac{\overline{AM}\cdot h_2}{2}$; $P_2=\frac{\overline{MC}\cdot h_2}{2}$; $P_3=\frac{\overline{MC}\cdot h_1}{2}$;

$P_4=\frac{\overline{AM}\cdot h_1}{2}$; и

$P_1\cdot P_3=\frac{\overline{AM}\cdot h_2}{2}\cdot\frac{\overline{MC}\cdot h_1}{2}=\frac{\overline{AM}\cdot h_1}{2}\cdot\frac{\overline{MC}\cdot h_2}{2}=P_2\cdot P_4$.