Dirichletov princip

SNJEŽANA MAJSTOROVIĆ*

Sažetak. *U članku su navedene forme Dirichletova principa. Svaka od njih ilustrirana je primjerom.*

Ključne riječi: *Dirichletov princip, prebrojavanje, razmještaj*

Dirichlet's box principle

Abstract. *The paper gives forms of Dirichlet's principle. Each of them is illustrated by an example*

Key words: *Dirichlet's principle, counting, arrangement*

1. Uvod

Kombinatorika je matematička disciplina koja uglavnom proučava konačne skupove i strukture. Pretežno se bavi razmještajima objekata zadanog konačnog skupa u izvjesne konfiguracije (sheme). Osnovni problemi koji se pritom javljaju su: egzistencija razmještaja, prebrojavanje i klasifikacija razmještaja te proučavanje poznatih razmještaja.

Dirichletov princip ili princip kutija (u literaturi se može naći i kao "princip pretinaca", "princip golubinjaka") jednostavan je i djelotvoran kombinatorni princip kojeg je prvi formulirao i koristio njemački matematičar G. Lejeune-Dirichlet (1805.–1859.) otprilike 1834. godine.

Svatko se od nas zasigurno susreo s brojnim kombinatornim problemima, kako sa svakodnevnim, tako i s 'pravim', matematičkim. Primjerice, postoje li u Hrvatskoj ljudi s istim brojem vlasi na glavi, je li moguće da u šumi od milijun stabala postoje dva stabla s istim brojem listova, mogu li među trinaestero ljudi pronaći dvoje koji su rođeni istog mjeseca... Odgovore na takva pitanja daje upravo Dirichletov princip. Slikovito, on kaže da ako vrlo mnogo golubova doleti u nekoliko golubinjaka, onda će bar u jednom golubinjaku biti barem dva goluba. Naizgled jednostavna i trivijalna tvrdnja vrlo je moćan alat i ima veliku primjenu u raznim matematičkim disciplinama (geometrija, teorija brojeva) pa i u računalnoj znanosti. Dokazivanje brojnih tvrdnji uz pomoć Dirichletova principa vrlo je jednostavno, samo se treba pridržavati određenih pravila. Treba odlučiti što su golubovi, a što golubinjaci, pri čemu golubova mora biti više od golubinjaka. Zatim, mora postojati pravilo pridruživanja golubova golubinjacima tako da oni koji se nalaze u istom golubinjaku imaju traženo svojstvo. Kada se takve pojedinosti riješe, slijedi direktna primjena samog principa kojom se tvrdnja odmah dokazuje.

*Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Trg Ljudevita Gaja 6, HR-31000 Osijek, email: `smajstor@mathos.hr`

2. Dirichletov princip — slaba forma

Teorem 1. *Neka je n prirodan broj. Ako $n+1$ predmeta bilo kako rasporedimo u n kutija (pretinaca), tada bar jedna kutija sadrži bar dva predmeta.* *Dokaz:* Gotovo da i nije potrebno dokazivati ovako očitu tvrdnju. Mi ćemo to ipak učiniti, jer će se koncepcija dokaza primjenjivati u rješavanju mnogih drugih problema.

Dokažimo tvrdnju kontradikcijom: pretpostavimo da ne postoji kutija koja sadrži više od jednog predmeta. To znači da svaka od n kutija sadrži ili jedan ili nijedan predmet. Označimo s m broj praznih kutija; sigurno vrijedi $m \geq 0$. Tada će broj kutija koje sadrže jedan predmet biti $n - m$. To bi značilo da je ukupan broj predmeta smještenih u n kutija $n - m$ što je u kontradikciji s pretpostavkom da želimo smjestiti $n + 1$ predmet u n kutija, a $n - m \leq n < n + 1$. Stoga je naša pretpostavka o nepostojanju kutije koja sadrži više od jednog predmeta kriva! $\square$

Valja uočiti da Dirichletov princip daje samo egzistenciju kutije s barem dva predmeta, ne i algoritam njenog pronalaska.

Označimo s $|A|$ broj elemenata skupa A. Dirichletov princip može se iskazati i ovako:

Teorem 2. *Neka su S i T konačni skupovi, takvi da je $|S| > |T|$, a $f : S \to T$ neko preslikavanje. Tada f nije injekcija, tj. postoje $x, x' \in S, x \neq x'$, takvi da je $f(x) = f(x')$.*

Teorem 3. *Neka su S i T konačni skupovi sa $|S| = |T| = n$, a $f : S \to T$ neko preslikavanje. Tada je*

$$f \quad injekcija \quad \Leftrightarrow \quad f \quad surjekcija.$$

Dokaz: Pretpostavimo da je f injekcija. Tada je $|S| = |f(S)|$. Prema pretpostavci je $|S| = |T|$, a kako je $f(S) \subseteq T$, te zbog $|f(S)| = |T|$ slijedi da je $f(S) = T$, jer je T konačan skup pa ne može biti ekvipotentan svom pravom podskupu. Dakle, f je surjekcija.

Obrat: Neka je f surjekcija. Za svako preslikavanje $g : X \to Y$ je $|g(X)| \leq |X|$. Neka su $x, x' \in S, x \neq x'$. Pretpostavimo da je $f(x) = f(x')$. Promotrimo restrikciju $f' : S \setminus \{x\} \to T$ od f, tj. $f' = f\,|_{S\setminus\{x\}}$. Očito je tada i f' surjekcija, pa je zbog gornje napomene tada $n = |f'(S \setminus \{x\})| \leq |S \setminus \{x\}| = n - 1$, što je nemoguće. $\square$

Primjer 1. Postoji element u nizu $7, 77, 777, 7777, 77777, \ldots$ koji je djeljiv sa 7717. *Dokaz:* Poslužit ćemo se kontradikcijom. Štoviše, pokazat ćemo da se takav element nalazi među prvih 7717 elemenata danog niza.

Pretpostavimo da ne postoji element u nizu $7, 77, 777, 7777, 77777, \ldots$ koji je djeljiv sa 7717. Uzmimo prvih 7717 elemenata danog niza i podijelimo svaki od njih sa 7717. Kako niti jedan među njima nije djeljiv sa 7717, svaki će pri dijeljenju sa 7717 imati ostatak najmanje 1, a najviše 7716. Kako imamo ukupno 7717 ostataka (po jedan za svaki od prvih 7717 elemenata niza), a samo 7716 mogućih vrijednosti ostataka, slijedi prema Dirichletovu principu da postoje dva elementa od prvih 7717 koji će imati isti ostatak. (Moguće vrijednosti ostataka predstavljaju kutije, ima ih 7716, a prvih 7717 elemenata niza su predmeti.)

Označimo s a_i i a_j elemente niza koji imaju isti ostatak i neka je $i < j$. Kako a_i i a_j imaju isti ostatak pri dijeljenju sa 7717, postoje prirodni brojevi k_i, k_j i r takvi da je $r \leq 7716$, $a_i = 7717 \cdot k_i + r$ i $a_j = 7717 \cdot k_j + r$. Oduzimanjem slijedi

$a_j - a_i = 7717 \cdot (k_j - k_i)$, što ukazuje na djeljivost broja $a_j - a_i$ sa 7717. Ova je činjenica ključna za dokazivanje egzistencije elementa u danom nizu koji je djeljiv sa 7717.

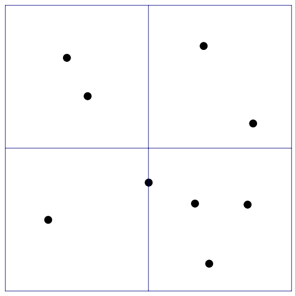
$$\begin{array}{rrl} & 77777777777777777777777777 & j \text{ znamenaka} \\ - & 7777777777777777777 & i \text{ znamenaka} \\ \hline & 77777770000000000000000000 & j-i \text{ znamenaka je 7, a } i \text{ znamenaka je 0} \end{array}$$

Dakle, u broju $a_j - a_i$ prvih $j-i$ znamenaka je 7, a preostalih i znamenaka je 0 pa se takav broj može zapisati u obliku

$$a_j - a_i = a_{j-i} \cdot 10^i.$$

Kako su brojevi 7717 i 10^i relativno prosti, mora slijediti da je a_{j-i} djeljiv sa 7717 pa je dokaz gotov.

Primjer 2. Unutar kvadrata stranice 1 nasumice je smješteno 9 točaka. Tada postoje 3 točke od danih 9 koje su sadržane u krugu polumjera 2/5.



Rješenje: Podijelimo kvadrat u četiri kvadratića kao na slici. Najnepovoljniji raspored koji može imati 8 točaka jest da su u svakom od tih kvadratića dvije točke. Tada je prema Dirichletovu principu deveta točka u nekom od tih kvadratića, npr. u donjem desnom. Opišimo tom kvadratiću krug. Njegov polumjer iznosi

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1.4142\ldots}{4} < \frac{1.44}{4} = 0.36 < 0.4 = \frac{2}{5},$$

pa su u tom krugu 3 točke od danih 9.

Primjer 3. Od n, ne nužno različitih cijelih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$, postoje cijeli brojevi k i l, pri čemu $0 \leq k < l \leq n$, takvi da je zbroj $a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_l$ višekratnik broja n. *Dokaz:* Promotrimo sljedeće cijele brojeve:

$$a_1, \quad a_1 + a_2, \quad \ldots, \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

te podijelimo svaki od njih sa n. Imamo

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_i = q_i n + r_i, \quad 0 \leq r_i \leq n-1, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ako je jedan od ostataka $r_1, r_2, \ldots, r_n$ nula, recimo, $r_k = 0$, tada je $a_1 + a_2 + \cdots a_k$ višekratnik od n. Ako niti jedan od $r_1, r_2, \ldots, r_n$ nije nula, tada postoje dva jednaka ostatka (jer je $1 \leq r_i \leq n-1$ za sve i), recimo, $r_k = r_l$ uz $k < l$. To znači da dva cijela broja $a_1 + a_2 \cdots + a_k$ i $a_1 + a_2 + \cdots + a_l$ imaju isti ostatak pa je $a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_l$ višekratnik broja n.

3. Dirichletov princip — jaka forma

Koristeći se slabom formom Dirichletova principa možemo primijetiti da ako $2n+1$ predmeta treba rasporediti u n kutija, barem će jedna kutija sadržavati najmanje 3 predmeta. Dalje, ako $3n+1$ predmeta treba rasporediti u n kutija, tada će u barem jednoj kutiji biti najmanje 4 predmeta. Općenito, ako je $n(r-1)+1$ predmeta razmješteno u n kutija, tada će u bar jednoj kutiji biti najmanje r predmeta. Tako smo došli do jake forme Dirichletova principa:

Teorem 4. *Ako je m predmeta razmješteno u n kutija, onda barem jedna kutija sadrži $\lfloor \frac{m-1}{n} \rfloor + 1$ predmet, gdje je $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ funkcija koja realnom broju x pridružuje najveći cijeli broj koji nije veći od x.* *Dokaz:* Najveći višekratnik broja n koji je manji od m nađe se tako da se n redom množi s $1, 2, 3, \ldots$, sve dok ne premašimo $m-1$. Najveći takav višekratnik koji nije veći od $m-1$ je upravo $\lfloor \frac{m-1}{n} \rfloor$. Kada bi bilo točno $n \cdot \lfloor \frac{m-1}{n} \rfloor$ predmeta, stavili bismo $\lfloor \frac{m-1}{n} \rfloor$ njih u svaku kutiju, ali kako imamo m predmeta i $n \cdot \lfloor \frac{m-1}{n} \rfloor \leq m-1 < m$, u najmanje jednoj kutiji bit će bar jedan predmet više. □

Prethodni teorem možemo iskazati i ovako:

Teorem 5. *Neka su S i T konačni skupovi, $|S| = m$, $|T| = n$, a $f : S \to T$ neko preslikavanje. Tada postoji $y \in T$, tako da je*

$$|f^{-1}(y)| \geq \left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor + 1.$$

Primjer 4. Među 77 ljudi barem je 7 rođeno u istom mjesecu. *Rješenje:* Koristeći se jakom formom Dirichletova principa, slijedi da je barem $\left\lfloor \frac{77-1}{12} \right\rfloor + 1 = \lfloor 6.\dot{3} \rfloor + 1 = 7$ ljudi rođeno u istom mjesecu.

4. Opći Dirichletov princip

Teorem 6. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{N}$. Ako je $r_1 + r_2 + \cdots + r_n - n + 1$ predmeta razmješteno u n kutija $K_1, K_2, \ldots, K_n$, tada barem jedna kutija K_i sadrži najmanje r_i predmeta, tj. ili K_1 sadrži najmanje r_1 predmeta ili K_2 sadrži najmanje r_2 predmeta,…, ili K_n sadrži najmanje r_n predmeta.* *Dokaz:* Kontradikcijom. Pretpostavimo da za svaki i kutija K_i sadrži manje od r_i predmeta. Tada bi ukupan broj predmeta bio najviše $(r_1 - 1) + (r_2 - 1) + \cdots + (r_n - 1) = r_1 + \cdots + r_n - n$, što ne može biti. □

NAPOMENA: $r_1 + \cdots + r_n - n$ predmeta moguće je rasporediti u n kutija tako da svaka kutija K_i sadrži manje od r_i predmeta: $r_1 - 1$ u K_1, $r_2 - 1$ u K_2,…,$r_n - 1$ u K_n.

Za $r_1 = r_2 = \cdots = r_n$ dobivamo jaku formu Dirichletova principa, a ako je k tome još i $r = 2$, dobivamo slabu formu Dirichletova principa.

Primjer 5. U košari se nalaze jabuke, naranče i banane. Valja odrediti minimalni broj voća u košari tako da u njoj bude ili najmanje 8 jabuka ili najmanje 6 banana ili najmanje 9 naranči. *Rješenje:* Direktnom primjenom općeg Dirichletova principa dobivamo $8 + 6 + 9 - 3 + 1 = 21$.

Primjer 6. Neka je $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$ niz od n^2+1 realnih brojeva. Tada u tom nizu postoji rastući ili padajući podniz duljine $n+1$. *Dokaz:* Pretpostavimo da ne postoji $(n+1)$-člani rastući podniz našeg niza, pa dokažimo da postoji padajući niz duljine $n+1$. Neka je l_k duljina najvećeg rastućeg podniza koji počinje s a_k, $1 \le k \le n^2+1$. Kako smo pretpostavili da ne postoji rastući podniz duljine $n+1$, to je $1 \le l_k \le n$ za svaki k. Dakle, $l_1, l_2, \ldots, l_{n^2+1}$ je niz od n^2+1 prirodnih brojeva između 1 i n. Prema jakoj formi Dirichletova principa za $r-1=n$, tj. $r=n+1$, slijedi da postoji barem $n+1$ od n^2+1 brojeva $l_1, l_2, \ldots, l_{n^2+1}$ koji su jednaki, odnosno

$$l_{k_1} = l_{k_2} = \cdots = l_{k_{n+1}},$$

gdje je $1 \le k_1 < k_2 < \cdots < k_{n+1} \le n^2+1$. Pretpostavimo da je neki k_i $(1 \le i \le n)$ takav da je $a_{k_i} < a_{k_{i+1}}$. Tada zbog $k_i < k_{i+1}$ možemo uzeti najveći rastući podniz koji počinje s a_{k+1} i staviti a_k na početak. Tako dobijemo rastući podniz koji počinje s a_k. No, zbog definicije brojeva l_k, to povlači da je $l_{k_i} > l_{k_{i+1}}$, što je nemoguće. Stoga zaključujemo da je $a_{k_i} \ge a_{k_{i+1}}$ za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$. Dakle, $a_{k_1} \ge a_{k_2} \ge \cdots \ge a_{k_{n+1}}$, pa je $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_{n+1}}$ padajući podniz duljine $n+1$. Analogno se zaključuje u preostalom slučaju.

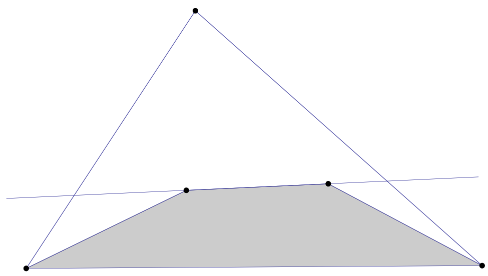
5. Ramseyev teorem

Dirichletov princip se može poopćiti do neslućenih razmjera. Prvi je to učinio Ramsey pa se po njemu i osnovni teorem koji je dokazao zove **Ramseyev teorem**, a cijela teorija koja se time bavi **Ramseyeva teorija**.

Teorem 7. *Za sve r, $m \in \mathbb{N}$ i sve prirodne brojeve $r_1, r_2, \ldots, r_m \ge r$ postoji najmanji prirodni broj $N = R(r_1, r_2, \ldots, r_m; r)$ tako velik da ako imamo skup od $n \ge N$ elemenata i ako u tom skupu razvrstamo sve r-člane podskupove u m klasa $K_1, K_2, \ldots, K_m$, onda postoji ili r_1 elemenata čiji su svi r-člani podskupovi u klasi K_1, ili r_2 elemenata čiji su svi r-člani podskupovi u klasi K_2, ..., ili r_m elemenata čiji su svi r-člani podskupovi u klasi K_m. Broj $R(r_1, r_2, \ldots, r_m; r)$ zove se (opći) Ramseyev broj.* Dokaz, koji zbog složenosti i duljine nećemo navesti, provodi se indukcijom po r (za $r=1$ to je opći Dirichletov princip), pa onda indukcijom po m (i po svim brojevima $r_1, r_2, \ldots, r_m \ge r$), dokažu se izvjesne nejednakosti koje induktivno osiguravaju egzistenciju Ramseyevih brojeva.

Ako bismo stavili $r=1$, tada je $N = R(r_1, r_2, \ldots, r_m; 1)$ najmanji broj sa svojstvom da ako imamo npr. n kuglica, $n \ge N$, koje trebamo staviti u m kutija $K_1, K_2, \ldots, K_m$, onda je ili u kutiji K_1 barem r_1 kuglica, ili je u kutiji K_2 barem r_2 kuglica, ..., ili je u kutiji K_m barem r_m kuglica. Vidimo, dakle, da je Dirichletov princip jedan poseban slučaj Ramseyeva teorema.

Primjer 7. Za svaki $m \ge 3$ postoji najmanji broj C_m takav da za $n \ge C_m$ vrijedi sljedeće: ako od n točaka ravnine nijedna trojka nije kolinearna, onda među njima postoji m točaka koje su vrhovi konveksnog m-terokuta. *Rješenje:* Odmah je jasno da je $C_3 = 3$ jer je svaki trokut konveksan. Pokažimo da je $C_4 = 5$. To znači da od 5 točaka u ravnini (bez kolinearnih trojki) uvijek postoji četiri koje su vrhovi konveksnog četverokuta. Zaista, konveksna ljuska tih točaka je konveksan mnogokut. Ako je to četverokut ili peterokut, problem je riješen. Međutim, ukoliko smo dobili trokut, onda dvije točke moraju ležati u njegovoj nutrini. Povučemo li pravac kroz njih, dva od ukupno tri vrha trokuta ležat će s iste strane pravca. Ta dva vrha i dvije točke iz nutrine čine konveksan četverokut.



Za opći slučaj potrebna nam je sljedeća lema:

Lema 1. *Za $n \geq 4$ točaka ravnine, od kojih nikoje tri nisu kolinearne vrijedi: ako svake četiri točke tvore konveksan četverokut, onda svih n točaka čini vrhove konveksnog n-terokuta.* *Dokaz:* Konveksna ljuska tih n točaka je konveksan m-terokut za neki $m \leq n$. Nazovimo taj m-terokut s M. Vrhovi od M su neke od zadanih točaka. Ako je $m = n$, problem je riješen. Ako je $m < n$, onda je barem jedna od tih točaka, nazovimo ju w, unutar M. Označimo vrhove m-terokuta M s $v_1, v_2, \ldots, v_m$ (to su neke od zadanih točaka) i povucimo dijagonale iz vrha v_1 do preostalih vrhova $v_2, v_3, \ldots, v_m$. Zbog pretpostavljene kolinearnosti točka w mora se nalaziti unutar jednog od trokuta $\triangle\ v_1v_2v_3$, $\triangle\ v_1v_3v_4$, ..., $\triangle\ v_1v_{m-1}v_m$ pa w zajedno s vrhovima toga trokuta ne čini konveksan četverokut, protivno pretpostavci. $\square$

Dovršimo dokaz primjera. Za $m \geq 4$ promotrimo Ramseyev broj $R(m, 5; 4)$ i neka je $n \geq R(m, 5; 4)$, a S skup od n točaka u ravnini bez kolinearnih trojki. Skup svih četvorki točaka iz S rastavimo u dvije klase K_1 i K_2. U K_1 neka su sve one četvorke koje čine vrhove konveksnog četverokuta, a u K_2 sve ostale četvorke. Prema Ramseyevu teoremu ili postoji m točaka iz S čije su sve četvorke u K_1 ili postoji 5 točaka iz S čije su sve četvorke iz K_2. Ovo posljednje znači da postoji 5 točaka čije su sve četvorke nekonveksni četverokuti, što ne može biti jer smo pokazali da je $C_4 = 5$. Preostaje samo prva mogućnost, a prema prethodnoj lemi tih m točaka čini vrhove konveksnog m-terokuta. Valja uočiti kako je ujedno dokazano da je $C_m \leq R(m, 5; 4)$.

Zadatci za vježbu

Zadatak 1. Dokažite da ako nasumice smjestimo 5 točaka u nutrinu jediničnog kvadrata, onda postoje dvije točke čija je udaljenost manja od $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Zadatak 2. Dokažite da ako odaberemo 7 različitih brojeva iz skupa $\{1, 2, 3, \ldots, 12\}$, onda među odabranim brojevima postoje dva koja zbrojena daju 12.

Zadatak 3. Pet različitih pari rukavica nalazi se u jednom pretincu. Izvlačimo nasumce po jednu rukavicu i ne vraćamo ih natrag u pretinac. Koliko je najmanje izvlačenja potrebno da bismo bili sigurni da imamo obje rukavice istog para?

Zadatak 4. U svakom konveksnom poliedru uvijek postoje dvije strane (plohe) s jednakim brojem bridova. Dokažite!

Zadatak 5. Dokažite da među 502 prirodna broja, uvijek postoje dva čija je ili suma ili razlika djeljiva sa 1000.

Literatura

[1] D. VELJAN, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.

[2] M. BÒNA, *A Walk Through Combinatorics*, World Scientific, Singapore, 2002.

[3] www.math.uvic.ca/faculty/gmacgill/guide/pigeonhole.pdf

[4] www.maths.manchester.ac.uk/~avb/pigeon.html

[5] www.cut-the-knot.org/do_you_know/pigeon.shtml

[6] www.math.ust.hk/~mabfchen/Math391II/Pigeonhole.pdf

[7] www2.edc.org/mathproblems/problems/htmlProblems/nsPigeonHole

[8] http://en.wikipedia.org/wiki/Pigeonhole_principle