XIX олимпијада

1. Во внатрешноста на квадрат $ABCD$ се конструирани рамнострани триаголници ABK, BCL, CDM и DAN. Докажи дека средините на отсечките KL, LM, MN, $NK, AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN$, се темиња на правилен дванаесетаголник.

Решение. *Прв начин.* Нека $X_1, X_2, ..., X_{12}$ се средини на отсечките LM, AN, $BL, MN, BK, CM, KN, CL, DN, KL, DM, AK$, соодветно.

Триаголникот PMX_3 е правоаголен, а X_2 е средина на хипотенузата MP. Имено, точката X_3 е средина на заемно нормалните отсечки BL и CM, а триаголникот MX_3X_2, заради симетрија на X_2 и X_3 во однос на правата KM е рамностран.

Точките P и X_1 лежат на дијагоналата AC (заради симетрија на M и L, односно B и D), па според тоа MPX_1 е правоаголен триаголник.

Четириаголникот X_1MX_3P е тетивен и $\measuredangle X_3PM = 30^\circ$, па затоа $\measuredangle MPX_1 = \frac{1}{2}\measuredangle MPL = 75^\circ$; $\measuredangle X_1X_2P = 30^\circ$ (агол спроти основа на рамнокрак триаголник) и $\measuredangle X_1X_2X_3 = 150^\circ$ е еднаков на збир на $\measuredangle X_1X_2P$ и $\measuredangle PX_2X_3$.

Со помош на симетрија во однос на правите KL, LN, AC и BD заклучуваме дека сите страни на дванаесетаголникот $X_1X_2...X_{12}$ се еднакви и дека секој агол во темињата $X_2, X_3, X_5, X_6, X_8, X_9, X_{11}, X_{12}$ е еднаков на 150°, а аглите во темињата X_1, X_4, X_7, X_{10} се меѓу себе еднакви. Збирот на внатрешните агли во дванаесетаголник е $10\cdot 180^\circ$, па затоа

$$\measuredangle X_{12}X_1X_2 = \measuredangle X_3X_4X_5 = \measuredangle X_6X_7X_8 = \measuredangle X_9X_{10}X_{11} = 150^\circ.$$

Втор начин. Поставуваме координатен систем така што координатниот почеток да биде во центарот на квадратот, со оски паралелни на неговите страни. Нека должините на страните на квадратот се еднакви на 2. Тогаш координатите на точките се:

$A(-1,-1)$, $B(1,-1)$, $C(1,1)$, $D(-1,1)$,

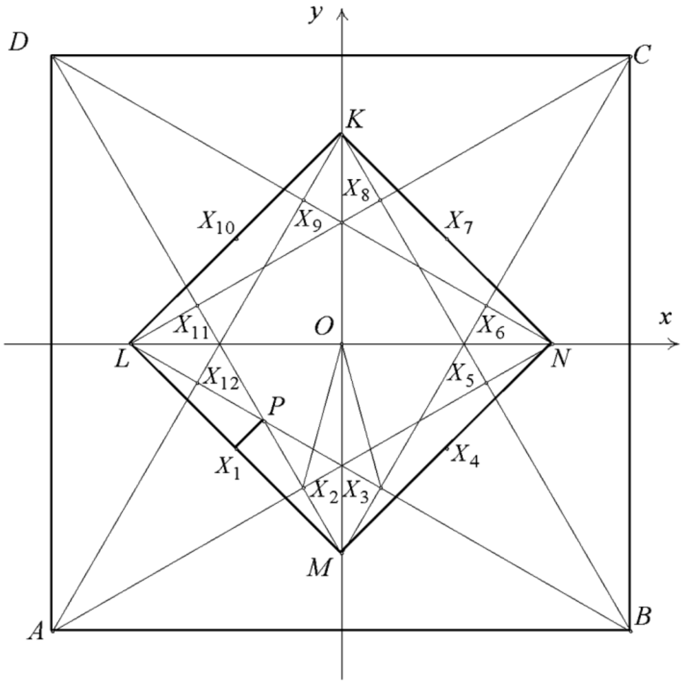
$K(0,\sqrt{3}-1)$, $L(-\sqrt{3}+1,0)$, $M(0,-\sqrt{3}+1)$, $N(\sqrt{3}-1,0)$,

$X_1(\frac{-\sqrt{3}+1}{2},\frac{-\sqrt{3}+1}{2})$, $X_4(\frac{\sqrt{3}-1}{2},\frac{-\sqrt{3}+1}{2})$, $X_7(\frac{\sqrt{3}-1}{2},\frac{\sqrt{3}-1}{2})$, $X_{10}(\frac{-\sqrt{3}+1}{2},\frac{\sqrt{3}-1}{2})$,

$X_2(-1+\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})$, $X_3(1-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})$, $X_5(\frac{1}{2},-1+\frac{\sqrt{3}}{2})$, $X_6(\frac{1}{2},1-\frac{\sqrt{3}}{2})$,

$X_8(1-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$, $X_{11}(-\frac{1}{2},1-\frac{\sqrt{3}}{2})$, $X_9(-1+\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$, $X_{12}(-\frac{1}{2},-1+\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Јасно,



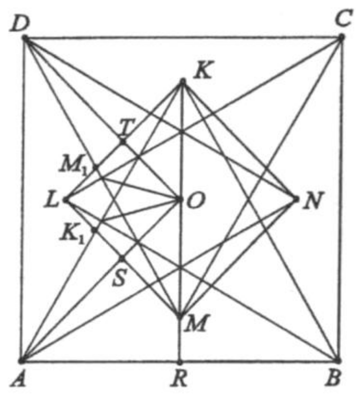
$$\overline{OX_i} = \sqrt{2-\sqrt{3}}\,,\; i = 1, 2, 3, ..., 12\,,$$

т.е. темињата на дванаесетаголникот лежат на иста кружница. Понатаму,

$$\overline{X_i X_{i+1}}^2 = 7-4\sqrt{3}\,, \text{ т.е. } \overline{X_i X_{i+1}} = 2-\sqrt{3}\,,\ (X_{13} = X_1).$$

Значи, сите точки се на иста кружница и растојанието меѓу две соседни темиња е исто, па затоа тие се темиња на правилен дванаесетаголник.

Трет начин. Нека $\overline{AB} = a$, $AB \cap KM = R$, $LM \cap AO = S$, $LK \cap OD = T$ и нека K_1 и M_1 се средини на отсечките AK и DM, а O е центар на квадратот $ABCD$ (цртеж десно). Заради симетрија доволно е да докажеме дека $\overline{SO} = \overline{K_1O} = \overline{M_1O}$ и



$$\measuredangle SOK_1 = \measuredangle K_1OM_1 = \measuredangle M_1OT = 30^\circ .$$

Имаме

$$\overline{KO} = \overline{KR} - \overline{OR} = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{3}-1)\,.$$

Од косинусната теорема применета на $\triangle K_1OK$ следува

$$\overline{K_1O}^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2(\sqrt{3}-1)^2}{4} - \frac{a^2(\sqrt{3}-1)}{2}\cos 30^\circ = \frac{a^2(2-\sqrt{3})}{4}\,,$$

односно $\overline{K_1O} = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}$.

Поради симетричност $\overline{OK} = \overline{OM}$, па од рамнокракиот правоаголен $\triangle SOM$ следува $\overline{OS} = \overline{MS} = \frac{\overline{OM}}{\sqrt{2}} = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}$. Значи, $\overline{K_1O} = \overline{OS}$. Поради симетрија ќе важи $\overline{M_1O} = \overline{TO} = \overline{SO} = \overline{K_1O}$, што и тртебаше да се докаже.

Од $\triangle AOK_1$, со примена на косинусната теорема се добива

$$\cos\measuredangle AOK_1 = \frac{\overline{K_1O}^2 + \overline{AO}^2 - \overline{AK_1}^2}{2\cdot\overline{K_1O}\cdot\overline{AO}} = \frac{\frac{a^2(2-\sqrt{3})}{4} + \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4}}{2\cdot\frac{a(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

па затоа $\measuredangle AOK_1 = 30^\circ$. Заради симетрија имаме $\measuredangle TOM_1 = 30^\circ$. Оттука следува дека $\measuredangle K_1OM_1 = 90^\circ - 2\cdot 30^\circ = 30^\circ$, што и требаше да се докаже.

2. Во конечна низа реални броеви збирот на било кои седум последователни членови е негативен, а збирот на било кои единаесет последователни членови е позитивен. Колку најмногу членови може да има оваа низа?

Решение. *Прв начин.* Да претпоставиме дека таква низа има барем 17 членови и нека првите 17 се $x_1, x_2, x_3, ..., x_{17}$. Бидејќи

$$x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + ... + x_{i+10} > 0 \quad \text{и} \tag{1}$$

$$x_{i+4} + x_{i+5} + x_{i+6} + ... + x_{i+10} < 0, \tag{2}$$

за секој $i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$, добиваме

$$x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3} > 0 \text{ за } i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}. \tag{3}$$

Од (3) и од

$$x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + ... + x_{i+6} < 0,\ i = 1, 2, 3, ..., 11, \tag{4}$$

следува

$$x_{i+4} + x_{i+5} + x_{i+6} < 0 \text{ за } i = 1, 2, 3, ..., 7$$

односно

$$x_i + x_{i+1} + x_{i+2} < 0 \text{ за } i = 5, 6, 7, ..., 11. \tag{5}$$

Од (3) и (5) добиваме

$$x_{i+3} > 0 \text{ за } i = 5, 6, 7 \text{, т.е. } x_8 > 0,\ x_9 > 0,\ x_{10} > 0,$$

што противречи на (5) за $i = 8$.

Следниот пример покажува дека 16 е максималниот број на членови на таква низа:

$$5,\ 5, -13,\ 5,\ 5,\ 5, -13,\ 5,\ 5, -13,\ 5,\ 5,\ 5, -13,\ 5,\ 5. \tag{6}$$

Втор начин. Како и во првиот начин на решавање пример на низа со 16 членови кои го задоволуваат условот на задачата е даден со (6).

Да претпоставиме дека во конечната низа која го задоволува условот на задачата им 17 членови: $x_1, x_2, x_3, ..., x_{17}$. Тогаш од условот на задачата следува

$$0>(x_1+x_2+x_3+...+x_7)+ \\ +(x_2+x_3+x_4+...+x_8)+ \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ +(x_{11}+x_{12}+x_{13}+...+x_{17}), \tag{7}$$

$$0>(x_1+x_2+x_3+...+x_{11})+ \\ +(x_2+x_3+x_4+...+x_{12})+ \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ +(x_7+x_8+x_9+...+x_{17}). \tag{8}$$

Лесно се проверува дека десните страни на равенствата (7) и (8) се еднакви, а тоа е противречност.

3. Даден е природен број n поголем од 2. Нека V_n е множество броеви од облик $1+kn$, $k\in\mathbb{N}$. За бројот $m\in V_n$ велиме дека е неразложлив во V_n ако не постојат броеви $p,q\in V_n$, такви што $m=pq$.

Докажи дека постои број $r\in V_n$ кој на повеќе од еден начин, може да се претстави како производ неразложливи множители во V_n. (Разложувањата кои се разликуваат само во редоследот на множителите во V_n ги сметаме за еднакви).

Решение. *Прв начин*. Нека за секој $n>2$ важи

$$(n-1)^2,(2n-1)^2,\ (n-1)(2n-1)\in V_n.$$

Ставаме

$$r=(n-1)^2(2n-1)^2.$$

Тогаш, $r\in V_n$. Броевите $(n-1)^2$ и $(2n-1)^2$ не може да се разложат во V_n. Во спротивно,

$$(n-1)^2=pq\geq(n+1)^2 \text{ или}$$

$$(2n-1)^2=pq=(n+1)^2 \text{ или}$$

$$(2n-1)^2=(n+1)(2n+1),$$

што не е можно. Го претставуваме бројот r на друг начин како производ на два броја од V_n:

$$r=[(n-1)(2n-1)][(n-1)(2n-1)].$$

Доволно е да забележиме дека $(n-1)^2$ не е делител на $(n-1)(2n-1)$. Затоа оваа факторизација на бројот r е различна од претходната.

Втор начин. Нека p е било кој прост делител на бројот $n-1$. Тогаш p не е делител на n и $p\neq1$. Нека s е најмалиот природен број за кој

$$p^s \equiv 1 \,(\bmod n)\,,$$

(според теоремата на Ојлер $s \le \varphi(n)$) и тогаш $p^s \in V_n$. Единствени делители на бројот p^s, поголеми од 1 и помали од p^s, се од облик p^k, $0 < k < s$. Ниту еден од тие броеви не припаѓа на множеството V_n и затоа p^s не е разложлив во V_n. Нека

$$r = p^s[(p^{s-1} + n)(p + n)]\,.$$

Значи, $r \in V_n$ и ова е едно од претставувањата на тој број во облик на производ на неразложливи броеви p^s и $(p^{s-1}+n)(p+n)$ од V_n. Сега ќе го запишеме бројот r како друг производ на неразложливи броеви од V_n. Еден од множителите во горниот запис е делив со p^s. Меѓутоа во претставувањето

$$r = (p^s + np)(p^s + np^{s-1})\,,$$

двата множители се од V_n и се неразложливи, и ниту еден од нив не е делив со p^s.

Трет начин. Ќе ја користиме теоремата на Дирихле: Ако $\mathrm{NZD}(a,b) = 1$, тогаш постојат бесконечно многу прости броеви од видот $ak + b,\, k \in \mathbb{N}$.

Од теоремата на Дирихле следува дека прости броеви од видот $nk - 1$ има бесконечно многу. Производот на било кои два броја од множеството $U_n = \{nk - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ припаѓа на множеството $V_n = \{nk + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$, бидејќи

$$(nk_1 - 1)(nk_2 - 1) = n(nk_1k_2 - k_1 - k_2) + 1\,.$$

Ако $p_1 = nk_1 - 1$ и $p_2 = nk_2 - 1$ се два прости броја од множеството U_n, тогаш бројот $p_1p_2 \in V_n$ и е неразложлив во V_n. Според тоа, и квадратот на секој прост број од U_n припаѓа на V_n и е неразложлив во V_n. Да го разгледаме бројот $r = (p_1p_2)^2$. Овој број може да се претстави на два начина

$$r = (p_1p_2)(p_1p_2) \text{ и } r = p_1^2p_2^2\,.$$

Броевите p_1^2 и p_2^2 припаѓаат на множеството V_n и се неразложливи во V_n, а исто така и бројот p_1p_2 припаѓа на V_n и е неразложлив во V_n. Според тоа, бројот $r = p_1^2p_2^2$, каде p_1 и p_2 се прости броеви од видот $nk - 1$ се разложува на два различни начини како производ од неразложливи броеви во V_n

4. Нека $a, b, A, B \in \mathbb{R}$. Да ја разгледаме функцијата

$$f(x) = 1 - a\cos x - b\sin x - A\cos 2x - B\sin 2x\,.$$

Докажи дека, ако $f(x) \ge 0$, за секој $x \in \mathbb{R}$, тогаш

$$a^2+b^2 \le 2 \text{ и } A^2+B^2 \le 1.$$

Решение. Функцијата $f(x)$ можеме да ја запишеме во обликот

$$f(x)=1-\sqrt{a^2+b^2}\left(\tfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\tfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)-$$
$$-\sqrt{A^2+B^2}\left(\tfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos 2x+\tfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin 2x\right),$$

односно во обликот

$$f(x)=1-\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\phi)-\sqrt{A^2+B^2}\sin(2x+\psi),$$

каде што $\sin\phi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\psi=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

а) Нека $x_0+\phi=\frac{\pi}{4}$, $x_1+\phi=\frac{3\pi}{4}$. Тогаш

$$f(x_0)=1-\sqrt{\tfrac{a^2+b^2}{2}}-\sqrt{A^2+B^2}\sin(\psi+\tfrac{\pi}{2}-2\phi)\ge 0 \text{ и}$$
$$f(x_1)=1-\sqrt{\tfrac{a^2+b^2}{2}}-\sqrt{A^2+B^2}\sin(\psi+\tfrac{3\pi}{2}-2\phi)\ge 0 .$$

Бидејќи третите собироци имаат различен знак (аргументите им се разликуваат за π) добиваме $1-\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\ge 0$, односно $a^2+b^2\le 2$.

б) Неравенството $A^2+B^2\le 1$ се добива на сличен начин. Треба да се изберат x_0 и x_1 така што

$$2x_0+\psi=\tfrac{\pi}{2}, \quad 2x_1+\psi=\tfrac{5\pi}{2}.$$

Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

5. Нека $a,b\in\mathbb{N}$ и при делење на a^2+b^2 со $a+b$ се добива количник q и остаток r. Определи ги сите парови (a,b) за кои е $q^2+r=1977$.

Решение. Броевите a,b,q и r мора да ги задоволуваат условите:

$$a^2+b^2=(a+b)q+r$$
$$0\le r<a+b$$
$$q^2+r=1977 .$$

Од $q^2\le 1977$ следува $q\le 44$, што значи

$$a^2+b^2<44(a+b)+(a+b)=45(a+b)$$

и бидејќи $(a+b)^2\le 2a^2+2b^2$, добиваме

$$(a+b)^2\le 90(a+b), \text{ т.е. } a+b\le 90 .$$

Според тоа $r<90$. Од

$$q^2 = 1977 - r > 1977 - 90 = 1887$$

добиваме $q > 43$ и како $q \leq 44$ имаме $q = 44$ и $r = 41$.

Останува уште да ги определиме природните броеви a и b кои ја задоволуваат равенката

$$a^2 + b^2 = 44(a+b) + 41 \text{, т.е. } (a-22)^2 + (b-22)^2 = 1009.$$

Да ги определиме целобројните решенија на равенката $x^2 + y^2 = 1009$ кои го задоволуваат условот $0 \leq x \leq y$. Од $x^2 \leq 1009$, следува $x \leq 31$, а од $2y^2 \geq 1009$ следува $y \geq 23$. Со непосредна проверка наоѓаме дека единствено решение е: $x = 15$, $y = 28$.

Според тоа, треба во $\mathbb{N}$ да ги решиме следните системи равенки

$$|a-22| = 15,\ |b-22| = 28 \text{; и}$$

$$|a-22| = 28,\ |b-22| = 15.$$

Првиот систем има решенија $(a,b) = (37,50)$ и $(a,b) = (7,50)$, а вториот $(a,b) = (50,37)$ и $(a,b) = (50,7)$, и тоа се единствените парови природни броеви кои ги задоволуваат условите на задачата.

6. Нека $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Докажи дека ако за секој $n \in \mathbb{N}$ важи $f(n+1) > f(f(n))$, тогаш $f(n) = n$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Решение. На почеток со индукција по n ќе докажеме дека $f(k) \geq n$ ако $k \geq n$. За $n = 1$ тврдењето очигледно е точно. Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за некој $n \in \mathbb{N}$. Нека $k \geq n+1$. Од $k-1 \geq n$ и од индуктивната претпоставка следува $f(k-1) \geq n$, па затоа $f(f(k-1)) \geq n$. Бидејќи $f(k) > f(f(k-1))$ добиваме $f(k) \geq n+1$, т.е. тврдењето е точно и за $k+1$.

Како последица од претходно докажаното следува $f(n) \geq n$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Нека претпоставиме дека за некој $n \in \mathbb{N}$ важи $f(n) > n$. Ставаме

$$f(m) = \min_{k>n} f(k).$$

Од $m-1 \geq n$ следува $f(m-1) > n$ (за $m-1 > n$, неравенството следува од $f(m-1) \geq m-1$, а за $m-1 = n$ од $f(n) > n$).

Нека $l = f(m-1)$ и $f(l) > f(m)$. Од $f(m) > f(f(m-1))$ следува $f(m) > f(l)$. Со тоа покажавме дека не постои $f(m) = \min\limits_{k>n} f(k)$, што не е можно бидејќи множеството $\{f(k) \mid k > n\}$ не е празно. Оттука следува дека не постои $n \in \mathbb{N}$ таков што $f(n) > n$. Конечно, бидејќи $f(n) \geq n$, за секој $n \in \mathbb{N}$ заклучуваме дека $f(n) = n$, за секој $n \in \mathbb{N}$.