Генерализација и аналитички доказ Ламеонове теореме

др Миодраг Мишић, **Крагујевац**

Arnold Droz-Farny публиковао је 1899. године без доказа теорему познату као Droz-Farni-јева линијска теорема. Ту теорему је уопштио Floor van Lamoen 2004. године. Теорема утврђује положај тачака подела одсечака у неком истом односу, на страницама троугла или њиховим продужецима који чине две нормале кроз ортоцентар неког троугла и генерализација теореме Droz-Farny-ја, када су деоне тачке на средини тих одсечака.

Теорема (Ламоен). *Ако две међусобно номалне праве које пролазе кроз ортоцентар H троугла ABC у пресеку са страницама тог троугла или њиховим продужецима образују три одсечка A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 и ако су тачкама A_3, B_3, C_3 ти одсечци подељени у истом односу, тада су те тачке на једној истој правој.*

Како ће се видети, када се теорема аналитички доказује, тада се на одсечцима могу бирати тачке A_3, B_3 и C_3 тако да однос дужина одсечака $A_1A_3 : A_2A_3 = B_1B_3 : B_2B_3 = C_1C_3 : C_2C_3 = l$ буде произвољан реалан број, а не само број између 0 и 1.

Доказ се аналитичком методом изводи ако се уведе координатни систем xHy, а за осе Hx и Hy система узму те међусобно нормалне праве кроз ортоцентар H троугла ABC. У том систему нека су координате тачака пресека страница (или њихових продужетака) са осама x и y редом тачке $A_1(a_1, 0)$, $A_2(0, a_2)$ на страници BC, $B_1(b_1, 0)$, $B_2(0, b_2)$ на страници CA и $C_1(c_1, 0)$, $C_2(0, c_2)$ на страници AB.

У основи доказа теореме је чињеница да тачке $\overline{A}(a_1, a_2)$, $\overline{B}(b_1, b_2)$ и $\overline{C}(c_1, c_2)$ припадају једној истој правој p.

У уведеном координатном систему, види се да странице референтног троугла ABC леже на правама и то:

- страница BC на правој A_1A_2, чија је једначина $\dfrac{x}{a_1} + \dfrac{y}{a_2} = 1$;
- страница CA на правој B_1B_2, чија је једначина $\dfrac{x}{b_1} + \dfrac{y}{b_2} = 1$;
- страница AB на правој C_1C_2, чија је једначина $\dfrac{x}{c_1} + \dfrac{y}{c_2} = 1$.

Висина AH референтног троугла је нормална на страницу BC и, како је коефицијент правца праве BC ($\equiv A_2A_1$) једнак $k = -\dfrac{a_2}{a_1}$, коефицијент правца нормале AH је $k' = \dfrac{a_1}{a_2}$. Пошто нормала пролази кроз ортоцентар H (који је и координатни почетак) њена једначина је $y = \dfrac{a_1}{a_2}x$.

Теме A троугла је у пресеку правих CA, AB и висине AH, па следи да мора бити:

$$b_2x + b_1\frac{a_1}{a_2}x = b_1b_2, \quad c_2x + c_1\frac{a_1}{a_2}x = c_1c_2,$$

или $x(a_2b_2 + a_1b_1) = a_2b_1b_2$, $x(a_2c_2 + a_2c_1) = a_2c_1c_2$. Деоба ових једнакости даје

$$\frac{a_2b_2 + a_1b_1}{a_2c_2 + a_2c_1} = \frac{b_1b_2}{c_1c_2},$$

одакле добијамо $c_1c_2(a_2b_2+a_1b_1)=b_1b_2(a_2c_2+a_2c_1)$, тј.

$$a_2b_2c_2(c_1-b_1)=a_1b_1c_1(c_2-b_2).$$

Поступајући на исти начин у вези са теменом B, добиће се и једнакост:

$$a_2b_2c_2(a_1-c_1)=a_1b_1c_1(a_2-c_2),$$

(која се може добити и цикличком пермутацијом слова a, b, c у претходној једнакости). Деобом последње две једнакости добија се

$$\frac{c_1-b_1}{a_1-c_1}=\frac{c_2-b_2}{a_2-c_2},$$

одакле следи

$$\begin{aligned}0&=(c_1-b_1)(a_2-c_2)-(a_1-c_1)(c_2-b_2)\\ &=\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & 1\\ c_1-b_1 & c_2-b_2 & 0\\ a_1-c_1 & a_2-c_2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & 1\\ c_1-b_1 & c_2-b_2 & 0\\ a_1 & a_2 & 1\end{vmatrix}\\ &=\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & 1\\ -b_1 & -b_2 & -1\\ a_1 & a_2 & 1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & 1\\ b_1 & b_2 & 1\\ a_1 & a_2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1\\ b_1 & b_2 & 1\\ c_1 & c_2 & 1\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Тиме је доказано да су тачке $\overline{A}(a_1,a_2)$, $\overline{B}(b_1,b_2)$ и $\overline{C}(c_1,c_2)$ на једној истој правој p. Нека су, даље, на дијагоналама $H\overline{A}$, $H\overline{B}$ и $H\overline{C}$ четвороуглова $HA_1\overline{A}A_2$, $HB_1\overline{B}B_2$, $HC_1\overline{C}C_2$ редом одређене тачке $\overline{A}'$, $\overline{B}'$ и $\overline{C}'$ тако да важи

$$H\overline{A}'=lH\overline{A},\quad H\overline{B}'=lH\overline{B},\quad H\overline{C}'=lH\overline{C},$$

где је l произвољан број. Тачке $\overline{A}'$, $\overline{B}'$ и $\overline{C}'$ имају тада координате $\overline{A}'(la_1,la_2)$, $\overline{B}'(lb_1,lb_2)$ и $\overline{C}'(lc_1,lc_2)$. Пошто је

$$\begin{vmatrix} la_1 & la_2 & 1\\ lb_1 & lb_2 & 1\\ lc_1 & lc_2 & 1\end{vmatrix}=l^2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1\\ b_1 & b_2 & 1\\ c_1 & c_2 & 1\end{vmatrix}=l^2\cdot 0=0,$$

и тачке $\overline{A}'$, $\overline{B}'$ и $\overline{C}'$ су на истој правој p', паралелној правој p. Нека је кроз тачку $\overline{A}'$ повучена права паралелна координатној Hx оси и нека је A_3 њена тачка пресека са правом BC. Ордината те тачке је једнака $y_3=la_2$. Апсциса x_3 тачке A_3 се добија сменом $y=la_2$ у једначини

$$\frac{x}{a_1}+\frac{y}{a_2}=1.$$

Тада је

$$\frac{x}{a_1}+\frac{la_2}{a_2}=1,$$

тј. $x_3 = (1-l)a_1$, па је $A_3((1-l)a_1, la_2)$. На исти начин се добијају и координате одговарајућих тачака B_3 и C_3: $B_3((1-l)b_1, lb_2)$, $C_3((1-l)c_1, lc_2)$. Доказаћемо да тачке A_3, B_3 и C_3 припадају истој правој q. То следи отуда што је

$$\begin{vmatrix} (1-l)a_1 & la_2 & 1 \\ (1-l)b_1 & lb_2 & 1 \\ (1-l)c_1 & lc_2 & 1 \end{vmatrix} = (1-l)l \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = (1-l)l \cdot 0 = 0.$$

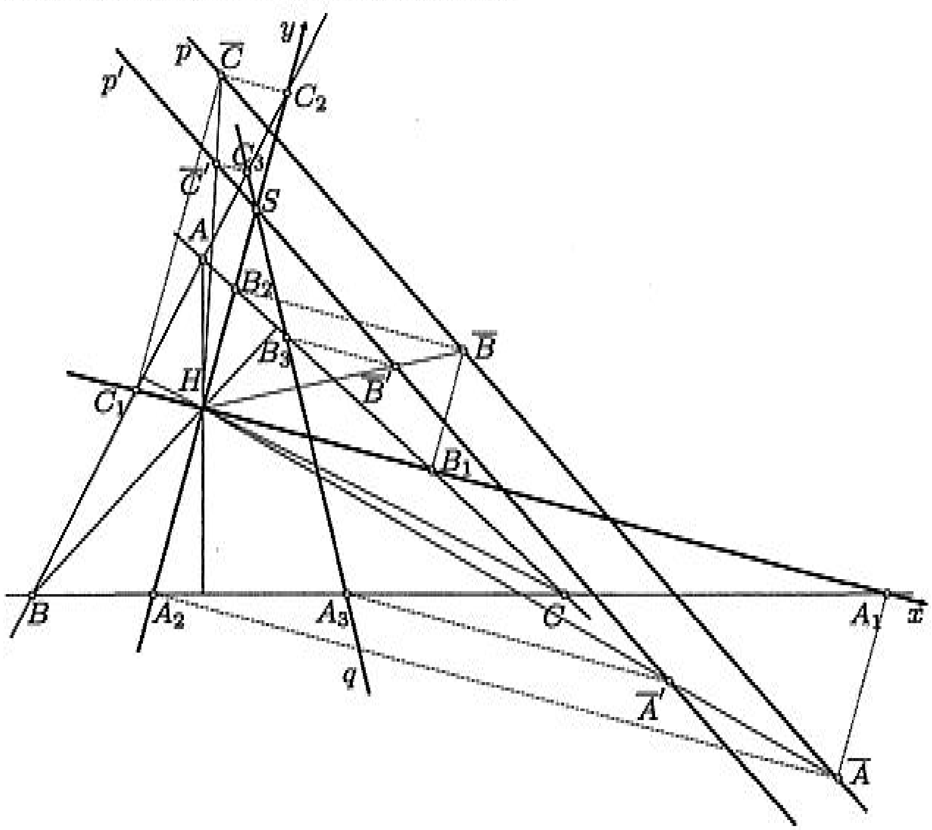
Будући да су праве $A_2\overline{A}$ и $\overline{A}'A_3$ паралелне, трапез $A_2A_3\overline{A}'\overline{A}$ је једнакокрак, па следи да су одсечци A_2A_3 и $\overline{A}'\overline{A}$ једнаки, јер су на једнаким дијагоналама A_2A_1 и $H\overline{A}$ правоугаоника $HA_1\overline{A}A_2$. На исти начин се показује једнакост и других одговарајућих одсечака, те је тако

$$A_2A_3 = \overline{A}'\overline{A}, \quad B_2B_3 = \overline{B}'\overline{B}, \quad C_2C_3 = \overline{C}'\overline{C}.$$

Тада је

$$\begin{aligned} &H\overline{A}' : \overline{A}'\overline{A} = A_1A_3 : A_3A_2 = H\overline{B}' : \overline{B}'\overline{B} = B_1B_3 : B_3B_2 \\ &= H\overline{C}' : \overline{C}'\overline{C} = C_1C_3 : C_3C_2 = l. \end{aligned}$$

Тиме је доказано да права q садржи све тачке A_3, B_3 и C_3, које у датом односу l деле одсечке A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 и тиме је завршен доказ теореме.



Напомене.

а) Двострука површина троугла чија су темена тачке $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$ једнака је

$$2P = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ако су темена троугла на једној правој, тада је површина троугла једнака нули. Дакле, горња детерминанта је једнака нули ако и само ако су три тачке A, B и C колинеарне.

б) Ако је $l = 0$, тада је $y = 0$ и права q се поклапа са Hx осом, а тачке A_3, B_3 и C_3 редом са тачкама A_1, B_1 и C_1. Ако је $l = 1$, тада је $x = 0$ и права q се поклапа са Hy осом, а тачке A_3, B_3 и C_3 редом са тачкама A_2, B_2 и C_2.

в) Теорема се доказује под претпоставком да координатне осе (тј. праве кроз ортоцентар троугла) секу странице или праве које их садрже. Ако је нека од тих правих паралелна једној од страница, тада је једна тачка пресека у бесконачности. Тако, ако је, на пример, Hx оса паралелна страници BC, тачка A_1 је у бесконачности, а $B_2 = C_2 = A$. Тада су праве p и q паралелне страници BC, што се лако види.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2010/11 година