Методи Главче
Скопје

ДИОФАНТОВИ ИДЕНТИТЕТИ

Старогрчкиот математичар Диофант (III век н.е.) е познат по неговите работи во теоријата на броеви, односно по таканаречените Диофантови равенки. За животот и делото на Диофант многу малку се знае, но нему му се препишуваат и следниве идентитети, кои во литературата се познатиу како Диофантови идентитети. Имено, точно е следново тврдење.

Тврдење 1. За секои $a,b,x,y\in\mathbb{R}$ важи

$$(ax+by)^2+(ay-bx)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2)\,, \qquad (1)$$

$$(ax-by)^2+(ay+bx)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2)\,, \qquad (2)$$

$$(ax+by)^2-(ay+bx)^2=(a^2-b^2)(x^2-y^2)\,, \qquad (3)$$

$$(ax-by)^2-(ay-bx)^2=(a^2-b^2)(x^2-y^2), \qquad (4)$$

Доказ. Ако ја искористиме формулата за квадрирање на бином, добиваме :

$$\begin{aligned}(ax+by)^2+(ay-bx)^2&=a^2x^2+2abxy+b^2y^2+a^2y^2-2abxy+b^2x^2\\&=a^2(x^2+y^2)+b^2(x^2+y^2)\\&=(a^2+b^2)(x^2+y^2),\end{aligned}$$

т.е. точен е идентитетот (1). Понатаму,

$$\begin{aligned}(ax-by)^2-(ay-bx)^2&=a^2x^2-2abxy+b^2y^2-a^2y^2+2abxy-b^2x^2\\&=a^2(x^2-y^2)-b^2(x^2-y^2)\\&=(a^2-b^2)(x^2-y^2),\end{aligned}$$

т.е. точен е идентитетот (4). Идентитетите (2) и (3) се докажуваат аналогно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ■

Задача 1. Докажи дека за секои $x,y\in\mathbb{R}$ важи

$$(x+y)^2+(x-y)^2=2(x^2+y^2)\,.$$

Решение. Доволно е во идентитетот (1) или во идентитетот (2) да земеме $a=b=1$. Провери!. ■

Задача 2. Разложи го на множители полиномот

$$(ax+by)^2+(ay-bx)^2+a^2+b^2.$$

Решение. Ако го искористиме идентитетот (1) добиваме

$$\begin{aligned}(ax+by)^2+(ay-bx)^2+a^2+b^2&=(a^2+b^2)(x^2+y^2)+a^2+b^2\\&=(a^2+b^2)(x^2+y^2+1).\end{aligned}$$

Забелешка. Аналогно се докажува дека

$$(ax-by)^2+(ay+bx)^2+a^2+b^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2+1). \blacksquare$$

Задача 3. Нека $ay=bx$. Докажи дека

$$(ax+by)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2) \text{ и}$$

$$(ax-by)^2=(a^2-b^2)(x^2-y^2).$$

Решение. Нека $ay=bx$. Тогаш $ay-bx=0$, па ако го искористиме идентитетот (1) добиваме

$$(ax+by)^2=(ax+by)^2+(ay-bx)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2),$$

а ако го искористиме идентитетот (4) добиваме

$$(ax-by)^2=(ax-by)^2-(ay-bx)^2=(a^2-b^2)(x^2-y^2),$$

што и требаше да се докаже. ■

Задача 4. Изразот $(m^2+1)(n^2+1)$ запиши го како збир на квадрати на два биноми.

Решение. *Прв начин*. Имаме

$$\begin{aligned}(m^2+1)(n^2+1)&=(mn)^2+m^2+n^2+1\\&=(mn)^2+2mn+1+m^2-2mn+n^2\\&=(mn+1)^2+(m-n)^2\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}(m^2+1)(n^2+1)&=(mn)^2+m^2+n^2+1\\&=(mn)^2-2mn+1+m^2+2mn+n^2\\&=(mn-1)^2+(m+n)^2\end{aligned}$$

Втор начин. Ако во идентитетот (1) ставиме $a=m, x=n$ и $b=y=1$, добиваме

$$(m^2+1^2)(n^2+1^2)=(mn+1)^2+(m-n)^2,$$

а ако ставиме $a=m, x=-n$ и $b=y=1$, добиваме

$$(m^2+1)(n^2+1)=(-mn+1)^2+(m-(-n))^2=(mn-1)^2+(m+n)^2. \blacksquare$$

Задача 5. Изразот $(m^2+1)(n^2+1)(p^2+1)$ запиши го како збир на квадрати на два биноми.

Решение. Ако прво го искористиме првото претставување добиено во задача 4, а потоа го искористиме идентитетот (1) за $a=mn+1$, $b=m-n$, $x=p$ и $y=1$, последователно добиваме:

$$\begin{aligned}(m^2+1)(n^2+1)(p^2+1)&=((mn+1)^2+(m-n)^2)(p^2+1)\\&=(mnp+m-n+p)^2+(mn-mp+np+1)^2,\end{aligned}$$

со што задачата е решена. ■

Задача 6. Изразот $a^2x^2+a^2y^2+b^2y^2+b^2x^2$ запиши го како збир на квадрати на два биноми.

Решение. *Прв начин*. Имаме:

$$\begin{aligned}a^2x^2+a^2y^2+b^2y^2+b^2x^2&=a^2x^2+2abxy+b^2y^2+a^2y^2-2abxy+b^2x^2\\&=(ax+by)^2+(ay-bx)^2.\end{aligned}$$

Слично се добива дека

$$a^2x^2+a^2y^2+b^2y^2+b^2x^2=(ax-by)^2+(ay+bx)^2.$$

Втор начин. Имаме

$$\begin{aligned}a^2x^2+a^2y^2+b^2y^2+b^2x^2&=a^2(x^2+y^2)+b^2(y^2+x^2)\\&=(a^2+b^2)(x^2+y^2).\end{aligned}$$

Сега, од идентитетот (1) следува

$$a^2x^2+a^2y^2+b^2y^2+b^2x^2=(ax+by)^2+(ay-bx)^2,$$

а од идентитетот (2) следува

$$a^2x^2+a^2y^2+b^2y^2+b^2x^2=(ax-by)^2+(ay+bx)^2. \blacksquare$$

Задача 7. Нека за целите броеви $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ важи $ab-cd=2$ и $ad+bc=45$. Докажи дека

$$a^2+b^2+c^2+d^2=2030.$$

Решение. Од Диофантовите идентите и од условот на задачата следува

$$(a^2+c^2)(b^2+d^2)=(ab-cd)^2+(ad+bc)^2=2^2+45^2=2029.$$

Понатаму, 2029 е прост број, па затоа единствени негови позитивни делители се 1 и 2029. Според тоа,

$$a^2+b^2+c^2+d^2=1+2029=2030. \blacksquare$$

Задача 8. Нека $c>0$. Ако ненегативните реални броеви x,y се такви што $x+y=c$, докажи дека $x^2+y^2\geq\frac{1}{2}c^2$. Кога важи знак за равенство?

Решение. *Прв начин*. Според задача 1 имаме

$$x^2+y^2=\tfrac{1}{2}((x+y)^2+(x-y)^2)=\tfrac{1}{2}(c^2+(x-y)^2)\geq\tfrac{1}{2}c^2,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $x=y=\frac{c}{2}$.

Втор начин. Од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува

$$\tfrac{c}{2}=\tfrac{x+y}{2}\leq\sqrt{\tfrac{x^2+y^2}{2}}, \text{ т.е. } x^2+y^2\geq\tfrac{1}{2}c^2,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $x=y=\frac{c}{2}$. $\blacksquare$

Задача 9. Ако збирот $a^2+b^2+x^2+y^2$ е константен, определи ја најголемата можна вредност на изразот $(ax+by)^2+(bx-ay)^2$.

Решение. Нека $a^2+b^2+x^2+y^2=m$. Ако прво го искористиме идентитетот (1), а потоа неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, добиваме

$$(ax+by)^2+(ay-bx)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2)\leq\left(\tfrac{a^2+b^2+x^2+y^2}{2}\right)^2=\tfrac{m^2}{4},$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a^2+b^2=x^2+y^2=\frac{m}{2}$. Според тоа, најголемата можна вредност на дадениот израз е $\frac{m^2}{4}$ и таа се достигнува за $a^2+b^2=x^2+y^2=\frac{m}{2}$. $\blacksquare$

Задача 10. Нека a,b,c,d се природни броеви такви што $ad-bc=1$. Докажи дека дропката $\frac{a^2+b^2}{ac+bd}$ не може да се скрати.

Решение. Нека претпоставиме дека дропката $\frac{a^2+b^2}{ac+bd}$ може да се скрати и нека $k>1$ е најголемиот заеднички делител на a^2+b^2 и $ac+bd$, т.е.

$a^2+b^2=km$ и $ac+bd=kn$, каде $\mathrm{NZD}(m,n)=1$. Ако во (1) ставиме $x=c$, и $y=d$ добиваме

$$(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2).$$

Во последното равенство ставаме $ad-bc=1$, $a^2+b^2=km$ и $ac+bd=kn$, па добиваме

$$k^2n^2+1=km(c^2+d^2),$$

од каде следува дека бројот $k>1$ е делител на 1, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека дропката $\frac{a^2+b^2}{ac+bd}$ не може да се скрати. ■

Задача 11. Докажи дека равенката

$$(x^2+y^2)(u^2+v^2)=6(xu+yv)^2$$

нема решение во множеството цели броеви.

Решение. Ако во идентитетот (1) ставиме $a=u, b=v$, добиваме

$$(xu+yv)^2+(yu-xv)^2=(x^2+y^2)(u^2+v^2).$$

Според тоа, дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(xu+yv)^2+(yu-xv)^2=6(xu+yv)^2,$$

т.е. на равенката

$$(yu-xv)^2=5(xu+yv)^2.$$

Левата страна на последната равенка е точен квадрат на цел број, па затоа и десната мора да е точен квадрат на цел број, што значи дека бројот 3 треба да е точен квадртат на цел број. Но, 5 не е точен квадрат на ниту еден цел број, па затоа последната равенка нема целобројни решенија, што значи дека дадената равенка нема целобројни решенија. ■