Ристо Малчески, Македонија
Алија Муминагиќ, Данска

НЕКОЛКУ НЕСТАНДАРДНИ ЗАДАЧИ ЗА ФИБОНАЧИЕВИТЕ И ЛУКАСОВИТЕ БРОЕВИ

Да се потсетиме, члeновите на низата определена со

$$F_1 = F_2 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,\ n \geq 1 \tag{1}$$

ги нарекуваме Фибоначиеви броеви, а члeновите на низата определена со

$$L_1 = 1, L_2 = 3, L_{n+2} = L_{n+1} + L_n,\ n \geq 1 \tag{2}$$

ги нарекувамне Лукасови броеви. Понатаму, ако означиме $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, тогаш со математичка индукција или решавајќи ги диференцните равенки (1) и (2) може да се докаже дека

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n),\ n = 1,2,3,... \tag{3}$$

$$L_n = \alpha^n + \beta^n,\ n = 1,2,3,... \tag{4}$$

Формулите (3) во литературата се познати како Бинетови формули. Како што можеме да видиме, со релациите (1) и (2) Фибоначиевите и Лукасовите броеви се определени со помош на рекурзии, па оттука и задачите поврзани со истите најчесто се решаваат со помош на математичка индукција. Меѓутоа, при решавањето на следните задачи ние ќе ги користиме формулите (3) и (4).

Задача 1. Докажи дека за секои $p, q \geq 1$ важи

$$F_p L_q + L_p F_q = 2F_{p+q}. \tag{5}$$

Решение. Ако ги искористиме формулите (3) и (4) добиваме дека за секои $p, q \geq 1$ важи:

$$\begin{aligned}
F_p L_q + L_p F_q &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^p - \beta^p)(\alpha^q + \beta^q) + (\alpha^p + \beta^p)\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^q - \beta^q) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}[(\alpha^p - \beta^p)(\alpha^q + \beta^q) + (\alpha^p + \beta^p)(\alpha^q - \beta^q)] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{p+q} + \alpha^p\beta^q - \beta^p\alpha^q - \beta^{p+q} + \alpha^{p+q} - \alpha^p\beta^q + \beta^p\alpha^q - \beta^{p+q}) \\
&= \frac{2}{\sqrt{5}}(\alpha^{p+q} - \beta^{p+q}) \\
&= 2F_{p+q},
\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

Задача 2. Докажи дека за секои $p,q \geq 1$ важи

$$L_p L_q + 5F_p F_q = 2L_{p+q}. \tag{5}$$

Решение. Ако ги искористиме формулите (3) и (4) добиваме дека за секои $p,q \geq 1$ важи:

$$\begin{aligned}
L_p L_q + 5F_p F_q &= (\alpha^p + \beta^p)(\alpha^q + \beta^q) + 5\frac{1}{\sqrt{5}^2}(\alpha^p - \beta^p)(\alpha^q - \beta^q) \\
&= (\alpha^p + \beta^p)(\alpha^q + \beta^q) + (\alpha^p - \beta^p)(\alpha^q - \beta^q) \\
&= (\alpha^{p+q} + \alpha^p\beta^q + \beta^p\alpha^q + \beta^{p+q} + \alpha^{p+q} - \alpha^p\beta^q - \beta^p\alpha^q + \beta^{p+q} \\
&= 2(\alpha^{p+q} + \beta^{p+q}) \\
&= 2L_{p+q},
\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

Задача 3. Докажи дека за секој $p \geq 1$ важи

$$L_p^2 - 5F_p^2 = 4\cdot(-1)^p. \tag{6}$$

Решение. Имаме $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, па ако ги искористиме формулите (3) и (4), добиваме дека за секој $p \geq 1$ важи:

$$\begin{aligned}
L_p^2 - 5F_p^2 &= (\alpha^p + \beta^p)^2 - 5\cdot\frac{1}{\sqrt{5}^2}(\alpha^p - \beta^p)^2 \\
&= \alpha^{2p} + 2\alpha^p\beta^p + \beta^{2p} - (\alpha^{2p} - 2\alpha^p\beta^p + \beta^{2p}) \\
&= 4(\alpha\beta)^p = 4(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2})^p \\
&= 4(\frac{1^2-\sqrt{5}^2}{4})^p = 4(\frac{1-5}{4})^p \\
&= 4\cdot(-1)^p,
\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

Задача 4. Докажи дека за секој $p \geq 1$ важи

$$F_{3p} = 5F_p^3 + 3(-1)^p F_p. \tag{7}$$

Решение. Во решението на задача 3 видовме дека $\alpha\beta = -1$, па ако ја искористиме формулата (3), добиваме дека за секој $p \geq 1$ важи:

$$\begin{aligned}5F_p^3+3(-1)^pF_p&=5\tfrac{1}{\sqrt{5}^3}(\alpha^p-\beta^p)^3+3(-1)^pF_p\\&=\tfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{3p}-3\alpha^{2p}\beta^p+3\alpha^p\beta^{2p}-\beta^{3p}(\\&=\tfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{3p}-\beta^{3p})-\tfrac{3}{\sqrt{5}}(\alpha\beta)^p(\alpha^p-\beta^p)+3(-1)^pF_p\\&=F_{3p}-3(-1)^pF_p+3(-1)^pF_p\\&=F_{3p},\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

Забелешка 1. а) Ако во (5) ставиме $p=q$, добиваме дека за секој $p\in\mathbb{N}$ важи

$$F_pL_p+L_pF_p=2F_{p+p}\text{, т.е. } F_{2p}=F_pL_q.$$

б) Ако во (6) ставиме $p=q$, добиваме дека за секој $p\in\mathbb{N}$ важи

$$L_pL_p+5F_pF_p=2L_{p+p}\text{, т.е. } 2L_{2p}=L_p^2+5F_p^2.$$

Во претходните разгледувања докажавме неколку идентитети за Фибоначиевите и Лукасовите броеви. Во следната задача ќе дадеме една примена на Фибоначиевите броеви при докажување на деливост на два полиноми.

Задача 5. Определи ги сите цели броеви a и b така што полиномот $p(x)=ax^7+bx^6+1$ е делив со полиномот $g(x)=x^2-x-1$.

Решение. За диференцната равенка (1) карактеристичната равенка е $x^2-x-1=0$, што значи дека бројот $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ е решение на равенката $g(x)=0$. Според тоа $\alpha^2=\alpha+1=F_2\alpha+F_1$. Понатаму,

$$\alpha^3=\alpha\alpha^2=\alpha(F_2\alpha+F_1)=F_2\alpha^2+F_1\alpha=F_2(\alpha+1)+F_1\alpha=F_3\alpha+F_2\text{, и}$$

$$\alpha^4=\alpha\alpha^4=\alpha(F_3\alpha+F_2)=F_3\alpha^2+F_2\alpha=F_3(\alpha+1)+F_2\alpha=F_4\alpha+F_3,$$

па затоа логично е да претпоставиме дека

$$\alpha^k=F_k\alpha+F_{k-1}, \tag{8}$$

за секој $k\geq 2$. Јасно, равенството (8) важи за $k=2,3,4$. Нека претпоставиме дека тоа важи за некој $k=n\geq 2$, т.е. дека $\alpha^n=F_n\alpha+F_{n-1}$. Тогаш за $k=n+1$ добиваме

$$\alpha^{n+1} = \alpha\alpha^n = \alpha(F_n\alpha + F_{n-1}) = F_n\alpha^2 + F_{n-1}\alpha = F_n(\alpha+1) + F_{n-1}\alpha = F_{n+1}\alpha + F_n,$$

па од принципот на математичка индукција следува дека равенството (8) важи за секој $k \geq 2$.

Да се вратиме на задачата. Нека a и b се цели броеви такви што полиномот $p(x) = ax^7 + bx^6 + 1$ е делив со полиномот $g(x) = x^2 - x - 1$. Тоа значи дека постои полином $q(x)$, $\deg q(x) = 5$ таков што

$$ax^7 + bx^6 + 1 = p(x) = g(x)q(x).$$

Според тоа,

$$a\alpha^7 + b\alpha^6 + 1 = g(\alpha)q(\alpha) = 0 \cdot q(\alpha) = 0.$$

Понатаму, применувајќи го равенството (8) добиваме

$$\begin{aligned} 0 = a\alpha^7 + b\alpha^6 + 1 &= a(F_7\alpha + F_6) + b(F_6\alpha + F_5) + 1 \\ &= \alpha(aF_7 + bF_6) + (aF_6 + bF_5 + 1). \end{aligned}$$

Но, α е ирационален број, па затоа последното равенство е можно ако и само ако

$$\begin{cases} aF_7 + bF_6 = 0, \\ aF_6 + bF_5 + 1, \end{cases}$$

т.е. ако и само ако

$$\begin{cases} 13a + 8b = 0, \\ 8a + 5b = -1. \end{cases} \tag{9}$$

Решението на системот (9) е $a = 8, b = -13$. Конечно, полиномот

$$p(x) = 8x^7 - 13x^6 + 1$$

е делив со полиномот $g(x) = x^2 - x - 1$. ■

Забелешка 2. На потполно идентичен начин може да се определат целите броеви a и b така што полиномот $p(x) = ax^{n+1} + bx^n + 1$, $n \geq 1$ е делив со полиномот $g(x) = x^2 - x - 1$. Имено, како и во решението на задача 5 се покажува дека ако $p(x)$ е делив со $g(x)$, тогаш

$$a\alpha^{n+1} + \alpha x^n + 1 = 0,$$

па затоа од равенството (8) следува равенството

$$\alpha(aF_{n+1} + bF_n) + (aF_n + bF_{n-1} + 1) = 0,$$

од каде, од исти причини како и погоре, следува системот линеарни равенки

$$\begin{cases} aF_{n+1}+bF_n=0 \\ aF_n+bF_{n-1}=-1. \end{cases} \tag{10}$$

Детерминантите на последниот систем се:

$$\Delta=\begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix}=F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n\neq 0,\ \text{(Касиниев идентитет)}$$

$$\Delta_a=\begin{vmatrix} 0 & F_n \\ -1 & F_{n-1} \end{vmatrix}=F_n, \qquad \Delta_b=\begin{vmatrix} F_{n+1} & 0 \\ F_n & -1 \end{vmatrix}=-F_{n+1},$$

па затоа решението на системот е:

$$a=\tfrac{\Delta_a}{\Delta}=(-1)^nF_n, \qquad b=\tfrac{\Delta_b}{\Delta}=(-1)^{n+1}F_{n+1}.$$

Конечно, полиномот

$$p(x)=(-1)^nF_nx^{n+1}+(-1)^{n+1}F_{n+1}x^n+1,\ n\geq 1$$

е делив со полиномот $g(x)=x^2-x-1$.

Забелешка 3. При решавањето на задача 5 докажавме дека за решението $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ на равенката $x^2-x-1=0$ важи релацијата (8). На потполно идентичен начин се докажува дека за второто решение $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ на равенката $x^2-x-1=0$ важи релацијата

$$\beta^k=F_k\beta+F_{k-1}, \tag{11}$$

за секој $k\geq 2$. Сега, ако од (8) ја одземеме (11) и искористиме дека $\alpha-\beta=\sqrt{5}$, добиваме

$$\alpha^k-\beta^k=F_k(\alpha-\beta),$$

$$F_k=\tfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^k-\beta^k), \tag{12}$$

за секој $k\geq 2$. Понатаму,

$$\tfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^1-\beta^1)=\tfrac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{5}=1=F_1$$

и ова е уште еден доказ на Бинетови формули, во кој е користена индукција за докажување на формулите (8) и (11), а самите Бинетови формули се добиени непосредно.

Литература

1. Bioknell, M., Hoggatt, V. E.: Fibonacci's Problem Book, The Fibonacci Association, San Jose, 1974
2. Карстенсен, Ј., Муминагиќ, А.: Фибоначиеви броеви и полиноми со целобројни коефициенти, Математички талент, Скопје, 2021
3. Малчески, Р. Фибоначиеви броеви, Математички талент, Скопје, 2021
4. Малчески, Р., Муминагиќ, А.: Три идентитети за Фибоначиевите броеви, Математички талент, Скопје, 2021