Илија Јанев

ЕДНА ЗАДАЧА, ПОВЕЌЕ НАЧИНИ ЗА НЕЈЗИНО РЕШАВАЊЕ

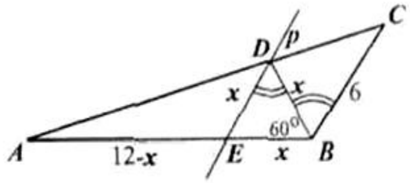
Постојат одредени математички задачи кои можат да се решат на еден единствен начин. Тие нè потсетуваат на планински врв, кој што може дасе "освои" само од една страна. Но, постојат и математички задачи коишто овозможуваат "освојување од повеќе страни", т.е. постојат повеќе патишта што водат до решението на задачата. Ваквите задачи овозможуваат да го искажеме сето наше богатство на идеи, досетки, проникливост, инвентивност.

Математичкото искуство на секој ученик би било непотполно, ако никогаш не би му се овозможила прилика да се обиде да реши некоја задача на повеќе начини. Со решавање на една задача на повеќе начини, ученикот стекнува самодоверба, истражува и ја гради својата математичка зрелост.

Еве, и во овој број на СИГМА ви нудиме една задача што може да се реши на повеќе начини. Но, пред да ги проследиме понудените решенија, обидете се и сами да ја решите задачата на неколку начини.

Задача. *Пресметај ја должината BD на симетралата на аголот β во триаголникот ABC, ако:* $a = 6\,cm$, $c = 12\,cm$ и $\beta = 120^\circ$.

Решение I. Нека $\overline{BD} = x$ е симетрала на аголот β на ΔABC. Низ D повлекуваме права $p \| BC$ и нека $p \cap AB = \{E\}$. Ќе докажеме дека ΔBDE е рамностран. Навистина:



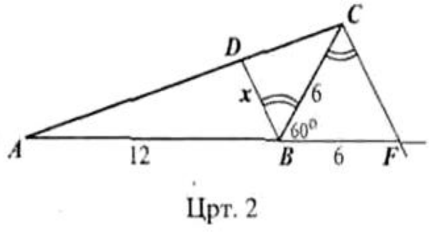
Црт. 1

$$\measuredangle DBE = \frac{1}{2}120^\circ = 60^\circ$$

$\measuredangle BDE = \measuredangle DBC = 60^\circ$ (наизменични)

Следствено ΔDBE е рамностран па следува дека $\overline{ED} = \overline{EB} = x$. Очигледно е дека $\Delta AED \sim \Delta ABC$, а оттука: $\overline{AE} : \overline{ED} = \overline{AB} : \overline{BC}$ или $(12 - x) : x = 12 : 6$ од каде што $x = 4$. Значи, $\overline{BD} = 4\,cm$.

Решение II. Нека $\overline{BD} = x$ е симетрала на аголот β на ΔABC и нека $CF \| BD$ (црт. 2). Лесно заклучуваме дека ΔBFC е рамностран, бидејќи има два агла по 60°, и дека $\Delta ABD \sim \Delta AFC$, од каде што $\overline{AB} : \overline{BD} = \overline{AF} : \overline{FC}$



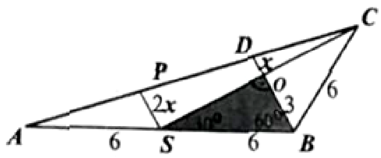
Црт. 2

$12 : x = (12 + 6) : 6$ т.е. $x = 4$. Значи $\overline{BD} = 4\,cm$.

Решение III. Нека S е средина на страната AB, тогаш $\overline{AS} = \overline{SB} = 3\,cm$, па следува дека $\Delta\, CSB$ е рамнокрак, со агли при основата CS од 30° (црт. 3). Бидејќи BD е симетрала на аголот β, следува дека ΔSBO е правоаголен, па имаме:

(1) $$\overline{BO} = \frac{1}{2}\overline{SB} = 3$$

(катетата наспроти агол од 30° е еднаква на половината од хипотенузата). Низ S повлекуваме $SP \parallel BD$. Бидејќи O е средина на отсечката CS, следува дека $\overline{OD} = x$ е средна линија во ΔSCP; тогаш $\overline{SP} = 2x$. Од друга страна, пак, SP е средна линија во ΔABD, бидејќи S е средина на AB, па добиваме:



Црт. 3

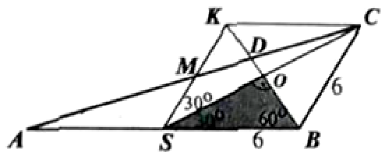
$\overline{BD} = 2\overline{SP} = 2 \cdot 2x = 4x$, а оттука:

(2) $$\overline{BO} = \overline{BD} - \overline{OD} = 4x - x = 3x$$

Од (1) и (2) наоѓаме дека $x = 1$. Следствено, $\overline{BD} = 4\,cm$.

Решение IV. Нека S е средина на страната AB, тогаш ΔCSB е рамнокрак, со агли при основата од 30° (црт. 4). Нека K е симетрична точка на точката B во однос на правата CS. По таков начин го добиваме ромбот $SBCK$, чии дијагонали се преполовуваат во пресечената точка O. Притоа, триаголниците SBK и BCK се рамнострани (бидејќи

$\measuredangle BSK = 30° + 30° = 60° = \measuredangle BCK$), со страна од $6\,cm$.



Црт. 4

Значи, $\overline{BK} = 6\,cm$, а $\overline{OK} = 3\,cm$. Бидејќи S е средина на отсечката AB и $SK \parallel BC$,

следува дека SM е средна линија во ΔABC, т.е. $\overline{SM} = \frac{1}{2}\overline{BC} = 3\,cm$. Но, $\overline{SK} = 6\,cm$, па значи M е средина на отсечката SK. Следствено, отсечката CM е тежишна линија во ΔSCK. Исто така, и KO е тежишна линија во истиот триаголник, па според тоа, нивниот пресек, точката D е тежиште во ΔSCK. Тогаш:

$\overline{OD} = \frac{1}{3}\overline{OK} = 1\,cm$, $\quad \overline{BO} = \frac{1}{2}\overline{BK} = 3\,cm$. $\overline{BD} = \overline{BO} + \overline{OD} = 4\,cm$.

Решение V. Нека BD е симетрала на аголот β на ΔABC, тогаш $\measuredangle ABD = \measuredangle CBD = 60°$. Конструираме два рамнострани триаголника: ABL, со страна $12\,cm$ и BCK, со страна $6\,cm$ (црт. 5). Нивните висини се однесуваат како 2:1, т.е.:

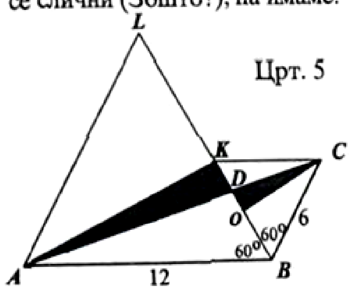
$\overline{AK} : \overline{CO2} = 2:1$.

Правоаголните триаголници AKD и COD се слични (Зошто?), па имаме:

$\overline{KD} : \overline{OD} = \overline{AK} : \overline{CO} = 2:1$. Оттука:

$\overline{OD} = \frac{1}{3}\overline{OK} = 1\,cm$. $\overline{BD} = \overline{BO} + \overline{OD} = 4\ cm$.

Црт. 5



Решение VI. Со симетралата $\overline{BD} = x$ на аголот β, триаголникот ABC е поделен на два триаголника ABD и BCD (црт. 2), па имаме:

$$P_{ABC} = P_{ABD} + P_{BCD}, \text{ т.е.}$$

$\frac{12 \cdot 6}{2}\sin 120° = \frac{12 \cdot x}{2}\sin 60° + \frac{6 \cdot x}{2}\sin 60°$ или $12 = 2x + x$, $x = 4$. Следствено, $\overline{BD} = 4\,cm$

Статијата првпат е објавенаво списанието СИГМА на СММ