ЕДНО ИНТЕРЕСНО РАВЕНСТВО ВО ТРИАГОЛНИК И НЕГОВИ ПОСЛЕДИЦИ

Шефкет Арсланагиќ, Сараево
Алија Муминагиќ, Данска

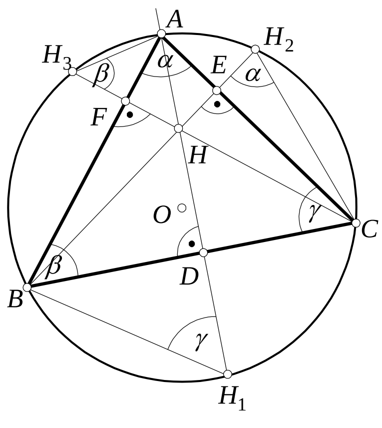
Знаеме дека за триаголник постојат многу важни теореми. Во оваа статија ќе дадеме едно интересно равенство во триаголник кое има и некои интересни последици. За доказ на равенството ќе користиме некои други равенства кои и сами за себе се вредни и интересни.

Станува збор за равенството

$$\left(\frac{\overline{AH_1}}{\overline{AD}}\right)^2+\left(\frac{\overline{BH_2}}{\overline{BE}}\right)^2+\left(\frac{\overline{CH_3}}{\overline{CF}}\right)^2=5+\frac{\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta+\mathrm{tg}^2\gamma}{(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma)^2}, \tag{1}$$

кое важи во триаголник, каде D, E и F се подножја на висините на триаголник повлечени од темињата A, B и C кон страните BC, AC и AB соодветно. Точките H_1, H_2 и H_3 се точки во кои продолженијата на висините ја сечат опишаната кружница k околу триаголникот, а α, β и γ се внатрешните агли на триаголникот ABC означени соодветно.

За да го докажеме равенството (1), ќе дока жеме претходно две теореми.



Теорема. Точките H_1, H_2 и H_3 кои се симетрични на ортоцентарот H во однос на страните BC, AC и AB во даден триаголник ABC лежат на опишаната кружница.

Доказ.Според цртеж 1, заради симетрија на точките H и H_1 во однос на страната BC, имаме:

$$\measuredangle BH_1C = \measuredangle BHC = \measuredangle FHE$$

Бидејќи страните на триаголникот и соодветните висини повлечени кон нив се взаемно нормални, добиваме:

$$\measuredangle FHE + \measuredangle FAE = 180^\circ .$$

Според тоа,

$$\measuredangle BH_1C + \measuredangle BAC = 180^\circ$$

па точките A, B, H_1 и C се концикличні, т.е. припаѓаат на една иста кружница. Бидејќи A, B и C припаѓаат на кружницата k, добиваме дека и H_1 припаѓа на кружницата k, што и требаше да се докаже.

Според теорема 1, имаме $\overline{HD} = \overline{DH_1}$, $\overline{HE} = \overline{EH_2}$ и $\overline{HF} = \overline{FH_3}$. Од последните три равенства добиваме

$$\left(\frac{\overline{AH_1}}{\overline{AD}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{BH_2}}{\overline{BE}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{CH_3}}{\overline{CF}}\right)^2 = \left(\frac{\overline{AD}+\overline{HD}}{\overline{AD}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{BE}+\overline{HE}}{\overline{BE}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{CF}+\overline{HF}}{\overline{CF}}\right)^2$$

$$= \left(1+\frac{\overline{HD}}{\overline{AD}}\right)^2 + \left(1+\frac{\overline{HE}}{\overline{BE}}\right)^2 + \left(1+\frac{\overline{HF}}{\overline{CF}}\right)^2 \tag{2}$$

$$= 3 + 2\left(\frac{\overline{HD}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{HE}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{HF}}{\overline{CF}}\right) + \left(\frac{\overline{HD}}{\overline{AD}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{HE}}{\overline{BE}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{HF}}{\overline{CF}}\right)^2$$

Сега од (1) и (2) гледаме дека доволно е да се докаже дека:

$$\frac{\overline{HD}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{HE}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{HF}}{\overline{CF}} = 1, \tag{3}$$

и

$$\left(\frac{\overline{HD}}{\overline{AD}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{HE}}{\overline{BE}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{HF}}{\overline{CF}}\right)^2 = \frac{\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\beta + \mathrm{tg}^2\gamma}{(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\gamma)^2}. \tag{4}$$

Наместо равенството (3) ќе докажеме поопшто равенство. Споменатото равенство се соржи во следната

Теорема 2. Ако точката S е во внатрешноста на триаголникот ΔABC и ако правите AS, BS и CS ги сечат страните BC, CA и AB во точките D, E и F, тогаш точно е равенството

$$\frac{\overline{SD}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{SE}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{SF}}{\overline{CF}} = 1. \tag{5}$$

Доказ. Нека површините на триаголниците ABC, BSC, ASC и ASB се:

$$P_{\Delta ABC} = P\,,\; P_{\Delta BSC} = p\,,\; P_{\Delta ASC} = q \text{ и } P_{\Delta ASC} = r\,.$$

Триаголниците ΔASB и ΔASC имаат заедничка страна AS и висини BK и CL (види цртеж 2); заради тоа:

$$\frac{r}{q} = \frac{\frac{1}{2}\overline{AS}\cdot\overline{BK}}{\frac{1}{2}\overline{AS}\cdot\overline{CL}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{CL}}\,,$$

а од сличноста на триаголниците $\Delta BDK \sim \Delta CDL$ следува:

$$\frac{\overline{BK}}{\overline{CL}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}\,.$$

Според тоа,

$$\frac{r}{q}\left(=\frac{\overline{BK}}{\overline{CL}}\right) = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}\,,$$

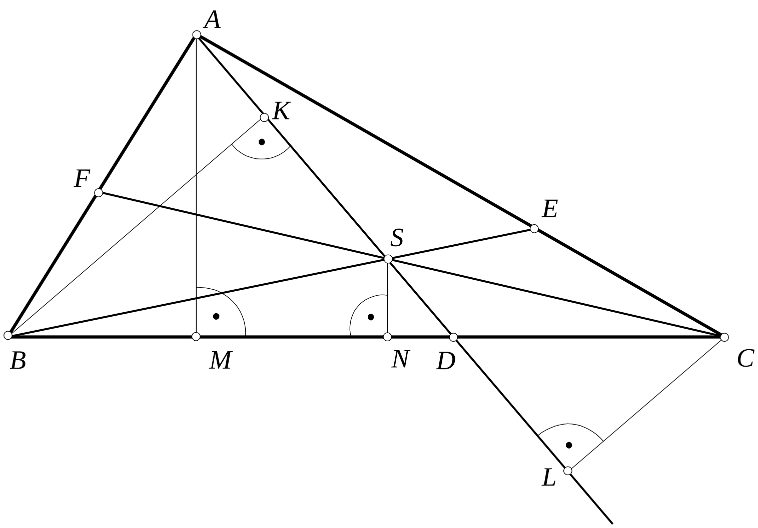
и на сличен начин добиваме:

$$\frac{p}{r} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} \text{ и } \frac{q}{p} = \frac{\overline{AF}}{\overline{BF}}\,.$$

Освен тоа, точни се равенството

$$\frac{p+q+r}{p} = \frac{P}{p} = \frac{\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{AM}}{\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{SN}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{SN}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{SD}}\,,$$

При што последното равенство следува од сличноста на триаголниците ΔAMD и ΔSND.



Слично добиваме дека

$$\frac{p+q+r}{q}=\frac{P}{q}=\frac{\overline{BE}}{\overline{SE}} \text{ и } \frac{p+q+r}{r}=\frac{P}{r}=\frac{\overline{CF}}{\overline{SF}}.$$

Конечно, со собирање на реципрочните вредности на последните три добиени равенства, имаме

$$\frac{\overline{SD}}{\overline{AD}}+\frac{\overline{SE}}{\overline{BE}}+\frac{\overline{SF}}{\overline{CF}}=\frac{p}{p+q+r}+\frac{q}{p+q+r}+\frac{r}{p+q+r}=\frac{p+q+r}{p+q+r}=1.$$

Со тоа теоремата е докажана.

Сега, ако избереме да $S\equiv H$, од (5) добиваме дека

$$\frac{\overline{HD}}{\overline{AD}}+\frac{\overline{HE}}{\overline{BE}}+\frac{\overline{HF}}{\overline{CF}}=1,$$

а ова е равенството (3) кое што требаше да го докажеме.

Сега, доволно е да се докаже точноста на равенството (4).

Од цртежот 1, јасно е дека се точни равенствата

$$\measuredangle AH_1B=\measuredangle ACB=\gamma, \qquad \measuredangle AH_3C=\measuredangle ABC=\beta, \qquad \measuredangle BH_2C=\measuredangle BAC=\alpha,$$

(периферијски агли над исти кружни лаци).

Од правоаголниот триаголник ΔCEH_2 имаме

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\overline{CE}}{\overline{EH_2}}(\text{poradi } \overline{EH_2}=\overline{HE})=\frac{\overline{CE}}{\overline{HE}} \Rightarrow \overline{HE}=\frac{\overline{CE}}{\mathrm{tg}\alpha},$$

а од правоаголниот триаголник ΔBEC, добиваме

$$\mathrm{tg}\gamma=\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} \Rightarrow \overline{BE}=\overline{CE}\,\mathrm{tg}\gamma.$$

Од последните две равенства, добиваме

$$\frac{\overline{HE}}{\overline{BE}}=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\gamma}.$$

Аналогно, се добива точноста на равенствата

$$\frac{\overline{HD}}{\overline{AD}}=\frac{1}{\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}\gamma} \text{ и } \frac{\overline{HF}}{\overline{CF}}=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}.$$

Од последните три равенства, користејќи го и равенството

$$\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\gamma=\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma,$$

добиваме

$$\left(\frac{\overline{HD}}{\overline{AD}}\right)^2+\left(\frac{\overline{HE}}{\overline{BE}}\right)^2+\left(\frac{\overline{HF}}{\overline{CF}}\right)^2=\frac{1}{\mathrm{tg}^2\beta\mathrm{tg}^2\gamma}+\frac{1}{\mathrm{tg}^2\gamma\,\mathrm{tg}^2\alpha}+\frac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\beta}$$

$$=\frac{\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta+\mathrm{tg}^2\gamma}{\mathrm{tg}^2\alpha\mathrm{tg}^2\beta\mathrm{tg}^2\gamma}=\frac{\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta+\mathrm{tg}^2\gamma}{(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma)^2},$$

а ова е равенството (4) кое требаше да го докажеме.

Од точноста на равенствата (2), (3) и (4) се добива точноста на равенството (1).

Интересно е да се напомене дека се точни и следните равенства:

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AD}}+\frac{\overline{BH}}{\overline{BE}}+\frac{\overline{CH}}{\overline{CF}}=2,$$

и

$$\frac{\overline{AH_1}}{\overline{AD}}+\frac{\overline{BH_2}}{\overline{BE}}+\frac{\overline{CH_3}}{\overline{CF}}=4.$$

Доказот на овие равенства му го препуштаме на читателот.

На крај ќе дадеме и една интересна последица од равенството (1). Поради очигледното неравенство $\frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]\geq 0$, т.е.

$$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx;\ (x,y,z\in\mathbb{R})\ \Leftrightarrow\ \frac{x^2+y^2+z^2}{(x+y+z)^2}\geq\frac{1}{3},$$

добиваме дека

$$\frac{\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta+\mathrm{tg}^2\gamma}{(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma)^2}\geq\frac{1}{3}.$$

Сега од равенството (1) имаме

$$\left(\frac{\overline{AH_1}}{\overline{AD}}\right)^2+\left(\frac{\overline{BH_2}}{\overline{BE}}\right)^2+\left(\frac{\overline{CH_3}}{\overline{CF}}\right)^2\geq\frac{16}{3}. \tag{6}$$

Равенство во (6) важи во случај кога $\mathrm{tg}\alpha=\mathrm{tg}\beta=\mathrm{tg}\gamma$, т.е. $\alpha=\beta==\gamma=60^\circ$, т.е. ако триаголникот е рамностран.

Неравенството (6) може да се разгледува посебно, и тоа претставува само за себе едно интересно тврдење.

Литература

[1] **Arslanagić,Š**.Matematika za nadarene, Bosanska riječ,2005

[2] **Arslanagić,Š**.Metodička zbirka zadataka za osnovama teorije iz elementarne matematike, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2006

[3] **Carstensen, J., Muminagić, A.**,Matematiske diameter, Frederiksberg, (Danska), 2005.

[4] **Palman, D.**, Trokut i kružnica, Element, Zagreb, 1994.

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на СММ