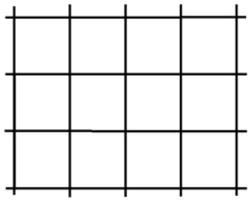
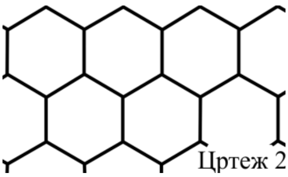
Ристо Малчески
Скопје

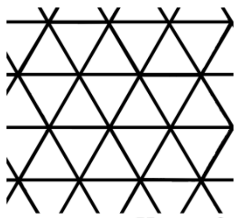
ПЧЕЛИНОТО САЌЕ – ГЕНИЈАЛНА ТВОРБА ВО ПРИРОДАТА


Цртеж 1

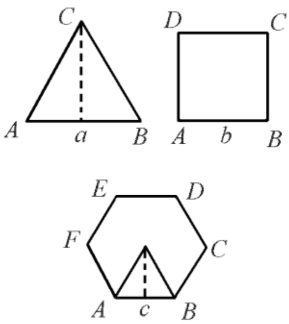
Мноштвото пчели во кошницата, како едно потполно уредено општество, се раководи од определени закони. Секоја единка ја извршува својата работа, која во кошницата е строго диференцирана. Ниту една не мирува. Дури ни оние што изгледаат така мирни, што висат во гроздови, и тие работат важна работа. Произведуваат восок, кој други пчели го користат за изградба на саќето, кое содржи илјадници прегради и комори и кое е вистинско ремек дело на природата. Во следните разгледувања ќе видиме зошто Матерлинк за шестстраната клетка на саќето ги искажал следниве зборови:


Цртеж 2

Сите гении заедно не може ништо на неа да поправат. Ниту едно живо суштество, ниту човекот на направил такво нешто во своето поле на дејствување, како што направиле пчелите.


Цртеж 3

Што е тоа што толку го воодушевило Матерлинк? Пчелите за своите потреби градат четири видови клетки. Во нашите разгледувања ќе се осврнеме само на правилните, т.е. на трутовските и работничките клетки, бидејќи нивните димензии се постојани, а начинот на изградба така пресметан и прецизен, што ништо не може да го подобри. Но, да видиме!



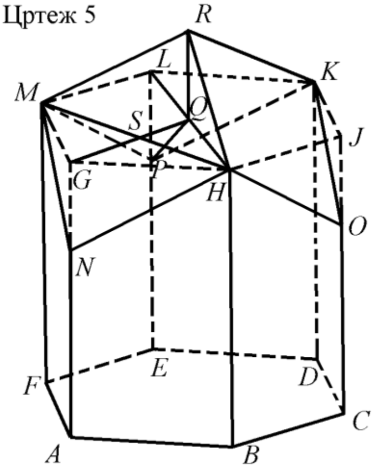
Цртеж 4

Уште Питагорејците знаеле: ако сакаме рамнината да ја покриеме со складни правилни многуаголници, тогаш то е можно само со квадрати (цртеж 1), правилни шестаголници (цртеж 2) и рамнострани триаголници (цртеж 3). Но, ова очигледно го знаат и пчелите, па така тие рамнината ја покриваат со складни правилни шестаголници, т.е. основата на секоја клетка е правилен шестаголник. Јасно, важно е рамнината целосно да се покрие, без празнини, за да може соседните клетки да користат исти ѕидови, што практично на пчелите им овозможува при изградбата на саќето да го штедат скапоцениот восок. Но, зошто правилни шестаголници, а не квадрати или рамнострани триагоници? Одговорот на ова прашање лежи во фактот што од трите видови правилни многуаголници со ист периметар, со кои рамнината целосно може да се покрие со еден вид, шестаголникот зафаќа најголема плоштина. Тоа значи дека, при изградба на клетка со даден волумен, доколку основата е правилен шестаголник за ѕидовите ќе се потроши најмалку восок. Навистина, да разгледаме рамностран триаголник, квадрат и правилен шестаголник со ист периметар (цртеж 4). Нивните страни да ги означиме со a, b и c, соодветно. Тогаш $3a = 4b = 6c$, па затоа $b = \frac{3}{4}a, c = \frac{1}{2}a$. Да ги определиме плоштините на многуаголниците. Имаме:

$$P_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},\ P_{\square ABCD} = b^2 = \frac{9}{16}a^2,\ P_{ABCDEF} = \frac{3c^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4},$$

и како $\sqrt{3} < \frac{9}{4} < 3\sqrt{3}$ заклучуваме дека $P_{\Delta ABC} < P_{\square ABCD} < P_{ABCDEF}$.

Цртеж 5



Како што видовме клетките целосно ја покриваат рамнината и тоа со правилни шестаголници и ваквото покривање е во функција на штедење на восокот. Но, саќето е направено така што клетките една со друга се поврзани со основите и тоа така да зададениот волумен се опфаќа со најмала плоштина. Освен тоа, во функција на заштеда на восокот, но и заради цврстината на саќето неговата клетка е модифицирана така што таа е дел од шестстран призматичен простор чие дно е ограничено со три ромба, кои формираат тристрана пирамида, па така бочните површини на станицата формираат трапези (цртеж 5). Притоа, од особена важност се големините на аглите на ромбовите и трапезите, бидејќи, како што ќе видиме, токму од нив ќе зависи дали ќе се заштеди восок при градењето на келиите.

Овде уште ќе спомнеме како во просторот се распоредени клетките, т.е. како тие го формираат саќето, бидејќи и тоа има своја логика. Имено, саќето е направено од два реда клетки, така што едниот ред со своите основи се наслонува на другиот и тоа по строго определен распоред. Пирамидалното дно на една клетка на предниот ред, кое се состои од три ромба, служи како дел од основите на три клетки на спротивниот ред, при што секој од овие три ромба припаѓа на друга клетка на спротивниот ред, формирајќи третина од нејзината “основа”. Ваквиот распоред е важен, бидејќи покрај тоа што пчелите штедат восок разместувајќи ги клетките во саќето без да остане празнина, споменатото распоредување има предност и во поглед на цврстината на градбата. Имено, во темето каде се состануваат ромбовите на една клетка се потпира работ во кој се сечат две бочни страни на една клетка, па така саќето добива на цврстина.

Во натамошните разгледувања не интересира какви мораат да бидат аглите под кои се сечат рамнините во клетката и какви мораат да бидат аглите на ромбовите, за да се постигне најголема заштеда на восок, т.е. плоштината на клетката на саќето да биде најмала.

Да го разгледаме цртеж 5. Имаме MH и GQ се дијагонали на ромбот $MGHQ$, па затоа $\Delta MGH \cong \Delta MQH$ и $\overline{GS} = \overline{SQ}$. Слично, MH и RN се дијагонали на ромбот $NMRH$, па затоа $\overline{SR} = \overline{SN}$ и $\Delta MNH \cong \Delta MRH$. Понатаму, $\measuredangle RSQ = \measuredangle NSG$, како агли со вкрстени краци. Според тоа, $\overline{GS} = \overline{SQ}$, $\overline{SR} = \overline{SN}$ и $\measuredangle RSQ = \measuredangle NSG$, што значи дека $\Delta NSG \cong \Delta RSQ$, т.е. $\overline{RQ} = \overline{NG}$. Да ги разгледаме призмите $NHMG$ и $MHRQ$, за кои покажавме дека $\Delta MGH \cong \Delta MQH$ и $\overline{RQ} = \overline{NG}$. Тоа значи дека $V_{NHMG} = V_{MHRQ}$. Аналогните размислувања се точни и за останатите два ромба на клетката на саќето, па затоа добиваме дека без разлика на аголот кој го зафаќаат ромбовите $NHRM$, $OKRH$ и $PMRK$ волуменот на саќето е еднаков на волуменот на шестстраната призма чија втора основа е шестаголникот $GHJKLM$.

Од досега изнесеното следува дека, бидејќи волуменот е константен, треба да ја определиме положбата на ромбот така да плоштината на клетката на саќето биде минимална. За таа цел да ги воведеме ознаките $\overline{AB} = \overline{GH} = a$, $\overline{AG} = h$ и $\overline{GN} = x$. Имаме, $P_{ABHN} = \frac{h+h-x}{2}a = ah - \frac{ax}{2}$, па затоа за плоштината на обиколката на клетката добиваме

$$P_1 = 6P_{ABHN} = 6ah - 3ax. \qquad (1)$$

Да ја определиме плоштината на ромбот $MNHR$. За таа цел доволно е да ги најдеме должините на неговите дијагонали MH и RN. Имаме, ΔGHQ е рамностран со должина на страна a и како SH е негова висина добиваме $\overline{SQ} = \frac{a}{2}$ и $\overline{SH} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Сега од Питагоровата теорема применета на ΔSGN следува

$$\overline{SN} = \sqrt{(\tfrac{a}{2})^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + \tfrac{a^2}{4}}.$$

Според тоа, $\overline{MH} = 2\overline{SH} = a\sqrt{3}$ и за плоштината на ромбот $MNHR$ добиваме

$$P_{MNHR} = \frac{\overline{MH} \cdot \overline{RN}}{2} = \overline{MH} \cdot \overline{SN} = a\sqrt{3} \cdot \sqrt{x^2 + \tfrac{a^2}{4}} = \sqrt{3a^2x^2 + \tfrac{3a^4}{4}},$$

па затоа за плоштината на пирамидалниот дел на клетката на саќето имаме

$$P_2 = 3P_{MNHR} = 3\sqrt{3a^2x^2 + \tfrac{3a^4}{4}}. \qquad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) за плоштината на клетката на саќето добиваме

$$P = P_1 + P_2 = 6ah - 3ax + 3\sqrt{3a^2x^2 + \tfrac{3a^4}{4}}. \qquad (3)$$

Заначи, треба да најдеме минимум на функцијата (3), т.е. да најдеме x таков што функцијата P прима минимум. Од очигледното неравенство

$$(x-\frac{a}{2\sqrt{2}})^2+\frac{a^2}{8}\geq 0 \qquad (4)$$

последователно ги добиваме еквивалентните на него неравенства

$$x^2-\frac{2ax}{2\sqrt{2}}+\frac{a^2}{8}+\frac{a^2}{8}\geq 0,$$

$$2x^2+\frac{a^2}{2}\geq\frac{2ax}{\sqrt{2}},$$

$$2x^2a^2+\frac{a^4}{2}\geq\frac{2a^3x}{\sqrt{2}},$$

$$3x^2a^2+\frac{3a^4}{4}\geq x^2a^2+\frac{2a^3x}{\sqrt{2}}+\frac{a^4}{2},$$

$$3x^2a^2+\frac{3a^4}{4}\geq(ax+\frac{a^2}{\sqrt{2}})^2,$$

$$\sqrt{3x^2a^2+\frac{3a^4}{4}}\geq ax+\frac{a^2}{\sqrt{2}},$$

$$6ah-3ax+3\sqrt{3x^2a^2+\frac{3a^4}{4}}\geq 6ah+\frac{3a^2}{\sqrt{2}},$$

што значи дека за секој x функцијата P прима вредност поголема или еднаква на $6ah+\frac{3a^2}{\sqrt{2}}$ и $P_{\min}=6ah+\frac{3a^2}{\sqrt{2}}$ ако и само ако десната страна на (4) достигнува минимум, т.е. ако и само ако $x=\frac{a}{2\sqrt{2}}$.

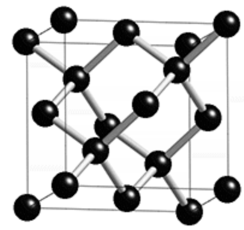
Понатаму, за добиената вредност на x имаме $\overline{SN}=\sqrt{(\frac{a}{2\sqrt{2}})^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ и како $\overline{SH}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ добиваме $\operatorname{tg}\measuredangle SNH=\frac{\overline{SH}}{\overline{SN}}=\sqrt{2}$, т.е. $\measuredangle SNH=54^0\ 44'\ 8''$, па затоа $\measuredangle MNH=2\measuredangle SNH=109^0\ 28'\ 16''$ и $\measuredangle NMR=180^0-109^0\ 28'\ 16''=70^0\ 31'\ 44''$ и тоа се токму аглите кои со непосредно мерење, уште во далечната 1712 година, ги добиле Маралди и Касини, т.е. тие добиле $109^0\ 28'$ и $70^0\ 32'$. Да го разгледаме аголот меѓу основата на призмата е ромб од нејзиниот пирамидален дел, кој е едаков на $\measuredangle GNS$. Имаме, $\overline{GN}=x=\frac{a}{2\sqrt{2}}$ и $\overline{GS}=\overline{SQ}=\frac{a}{2}$, па затоа $\operatorname{tg}\measuredangle GNS=\frac{\overline{GS}}{\overline{GN}}=\sqrt{2}$ и тоа е токму аголот кој со непосредно мерење го добиле Маралди и Касини.

Од досега изнесеното можеме да заклучиме дека пчелите своето саќе го градат така што при градбата имаат најмала потрошувачка на восок. Секако, на пчелите не можеме да им го препишеме изведувањето на сложените математички операции, како предуслов за изградба на саќето, па затоа едноставно ќе кажеме дека пчелиното саќе едноставно е чудо на природата.

Еден вид, сличен на пчелите, т.е. осите исто така прави саќе со шестстрани клетки, но во овој случај немаме двоен слој на клетки. Значи, не е искористено едно исто дно како заедничко за неколку клетки, што на пчелиното саќе му дава посебна цврстина. Но, дали само заедничкото дно на пчелиното саќе му дава поголема цврстина или има и нешто друго. Да ги разгледаме точките M, H, K и R. Од досега изнесеното имаме

$$\overline{KM} = \overline{KH} = \overline{MH} = 2\overline{SH} = a\sqrt{3} \text{ и}$$

$$\overline{RK} = \overline{RM} = \overline{RH} = \sqrt{\overline{SH}^2 + \overline{SR}^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{8}} = \frac{3a}{2\sqrt{2}}.$$



Ако ставиме $a\sqrt{3} = b$, добиваме

$$\overline{KM} = \overline{KH} = \overline{MH} = b \text{ и } \overline{RK} = \overline{RM} = \overline{RH} = \frac{b\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},$$

што значи дека точките M, H и K се три темиња на правилен тетраедар со должина на раб еднаква на b, а точката R е центар на сферата опишана околу овој тетраедар. Дали ова е случајно? Одговорот не е познат, но доволно е да забележиме дека јаглеродните атоми на дијамантот, кој има најголема позната цврстина во природата (цртеж десно), се распоредени токму на истиот начин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Паскалев, Г.; Чобанов, И.: Забележителни точки в тетраедъра, Народна просвета, София, 1988
2. Sevdić, M.: Pčelino sače kao matematički problem, Zagreb, 1947
3. Малчески, Р.: Проблем на паркетирање, Математика+, София, 2001

Статијата прв пат е објавена во списанието Математика и информатика на издавачка куќа АЗБУКИ