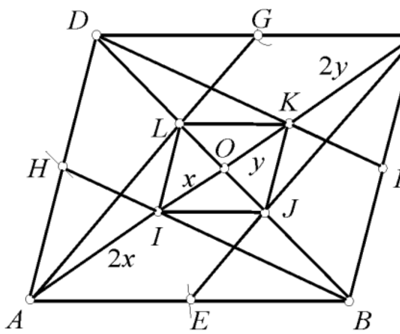
# JMMO 2016

1. Во множеството цели броеви, реши ја равенката
$$x_1^4+x_2^4+...+x_{14}^4=2016^3-1.$$
**Решение.** За $x=2k$ важи
$$x^4=16k^4\equiv 0(\mathrm{mod}16).$$
За $x=2k+1$, важи
$$x^4-1=8k(k+1)(2k^2+2k+1)\equiv 0(\mathrm{mod}16),$$
односно $x^4\equiv 1(\mathrm{mod}16)$. Според тоа, за секои $x_1,x_2,...,x_{14}\in\mathbb{Z}$ важи
$$x_1^4+x_2^4+...+x_{14}^4\equiv m(\mathrm{mod}16),\ 0\le m\le 14. \qquad (1)$$
Од друга страна,
$$2016^3-1\equiv 15(\mathrm{mod}16), \qquad (2)$$
Конечно, од (1) и (2) следува дека дека дадената равенка нема решение во множеството цели броеви.

2. Нека $ABCD$ е паралелограм и нека $E,F,G$ и $H$ се средини на страните $AB,BC,CD$ и $DA$, соодветно. Ако $BH\cap AC=I$, $BD\cap EC=J$, $AC\cap DF=K$ и $AG\cap BD=L$, докажи дека четириаголникот $IJKL$ е паралелограм.
**Решение.** Нека $AC\cap BD=O$. Јасно, $AO$ и $BH$ се тежишни линии на триаголникот $ABD$, од што следува дека $I$ е тежиште на $ABD$.

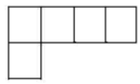



Слично $K$ е тежиште на триаголникот $BCD$. Ако $\overline{IO}=x$, тогаш $\overline{AI}=2x$. На потполно аналоген начи се добива дека ако $\overline{KO}=y$, тогаш $\overline{CK}=2y$. Според тоа,
$$3x=\overline{AO}=\overline{CO}=3y,$$

односно $\overline{IO} = x = y = \overline{KO}$. Аналогно се докажува дека $\overline{JO} = \overline{LO}$.

Конечно, дијагоналите на четириаголникот $IJKL$ се преполовуваат, што значи дека тој е паралелограм.

3. Даден е квадрат со димензии $4\times 4$, составен од 16 единечни квадратчиња. Во секое единечно квадратче на големиот квадрат е запишан ненегативен цел број така што збирот на било кои пет од нив кои може да се покријат со фигура прикажана на цртежот десно (фигурата може да се ротира и превртува) е еднаков на 5. Колку најмногу различни броеви може да се употребат за пополнување на квадратот?



**Решение.** За секој правоаголник со димензии $3\times 4$, види цртеж, е исполнето

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $e$ | $f$ | $g$ | $h$ |
| $i$ | $j$ | $k$ | $l$ |

$$\begin{aligned} a+(e+f+g+h) &= d+(e+f+g+h) \\ &= i+(e+f+g+h)\ , \\ &= l+(e+f+g+h) \end{aligned}$$

од каде следува дека $a = d = i = l$. Нека квадратот е пополнет како на долниот цртеж.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $e$ | $f$ | $g$ | $h$ |
| $i$ | $j$ | $k$ | $l$ |
| $m$ | $n$ | $o$ | $p$ |

Тогаш од претходната дискусија следува дека

$$a = c = m = o,\ b = d = n = p,\ a = d = i = l \text{ и } e = h = m = p.$$

Според тоа,

$$a = b = c = d = h = l = p = o = n = m = i = e = X,$$

и квадратот е од облик

| | | | |
|---|---|---|---|
| $X$ | $X$ | $X$ | $X$ |
| $X$ | $f$ | $g$ | $X$ |
| $X$ | $j$ | $k$ | $X$ |
| $X$ | $X$ | $X$ | $X$ |

Каде $X, f, g, j, k$ се ненегативни цели броеви. Сега е јасно дека важи $5X = 5$, од каде добиваме $X = 1$. Од друга страна,

$$f+g+3X=j+k+3X=f+j+3X=g+k+3X=5X\ ,$$

односно

$$f+g=j+k=f+j=g+k=2X\ .$$

Од првата и четвртата, односно втората и четвртата равенка следува дека $f=k=Y$ и $j=g=Z$ . Според тоа, квадратот е од облик

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | $Y$ | $Z$ | 1 |
| 1 | $Z$ | $Y$ | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

и притоа важи $Y+Z=2$, каде $Y$ и $Z$ се ненегативни цели броеви. Можни се следниве три случаи:

1) $Y=0, Z=2$,

2) $Y=1, Z=1$ и

3) $Y=2, Z=0$.

Според тоа, најмногу три различни броеви може да се употребат за пополнување на квадратот (случај 1 или случај 3).

4. Нека $x, y, z$ се позитивни реални броеви. Докажи, дека

$$\sqrt{\frac{xy}{x^2+y^2+2z^2}}+\sqrt{\frac{yz}{y^2+z^2+2x^2}}+\sqrt{\frac{zx}{z^2+x^2+2y^2}}\le\frac{3}{2}\ .$$

Кога важи знак за равенство?

**Решение.** Ако го искористиме познатото неравенство

$$x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx\ ,$$

а потоа неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина последователно добиваме

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{xy}{x^2+y^2+2z^2}}+\sqrt{\frac{yz}{y^2+z^2+2x^2}}+\sqrt{\frac{zx}{z^2+x^2+2y^2}}\le\\
&\le\sqrt{\frac{xy}{xy+yz+zx+z^2}}+\sqrt{\frac{yz}{xy+yz+zx+x^2}}+\sqrt{\frac{zx}{xy+yz+zx+y^2}}\\
&=\sqrt{\frac{xy}{(z+x)(y+z)}}+\sqrt{\frac{yz}{(x+y)(z+x)}}+\sqrt{\frac{zx}{(y+z)(x+y)}}\\
&\le\frac{\frac{x}{z+x}+\frac{y}{y+z}}{2}+\frac{\frac{y}{x+y}+\frac{z}{z+x}}{2}+\frac{\frac{z}{y+z}+\frac{x}{z+y}}{2}\\
&=\frac{\frac{x+y}{x+y}+\frac{y+z}{y+z}+\frac{z+x}{z+x}+}{2}=\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$ .

5. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x+y^2+(\mathrm{NZD}(x,y))^2=xy\cdot\mathrm{NZD}(x,y).$$

**Решение.** Воведуваме смена $z=\mathrm{NZD}(x,y)$ и ја добиваме равенката

$$x+y^2+z^2=xyz.$$

Нека $a$ и $b$ се природни броеви такви што

$$x=az \text{ и } y=bz,\ \mathrm{NZD}(a,b)=1.$$

Тогаш равенката го добива обликот

$$az+b^2z^2+z^2=abz^3,$$

односно

$$a+b^2z+z=abz^2.$$

Бидејќи десната страна на последната равенка е делива со $z$ и два од собирците од левата страна се деливи со $z$, следува дека и $z\mid a$. Според тоа, постои природен број $c$ таков што $a=cz$. Заменуваме во последната равенка и ја добиваме равенката $cz+b^2z+z=cbz^3$, т.е. равенката $c+b^2+1=cbz^2$, која е еквивалентна со равенката

$$b^2+1=c(bz^2-1).$$

Јасно е дека $bz^2\neq 1$, бидејќи во спротивно се добива $b^2+1=0$, што не е можно. Значи, $c=\frac{b^2+1}{bz^2-1}$ и ако последната равенка ја помножиме со $z^2$ добиваме

$$cz^2=\frac{b^2z^2+z^2}{bz^2-1}=b+\frac{b+z^2}{bz^2-1}.$$

Бидејќи $cz^2$ е природен број и $\frac{b+z^2}{bz^2-1}$ е природен број. Според тоа, $bz^2-1\leq b+z^2$, односно

$$(z^2-1)(b-1)\leq 2 \qquad (1)$$

Ако $b=1$, тогаш $c=\frac{2}{z^2-1}$ од каде следува дека $z^2=2$ или $z^2=3$, што не е можно. Ако $b=2$, тогаш $c=\frac{5}{2z^2-1}$. Ако $2z^2-1=1$, тогаш $z=1$. Следува дека $c=5$, $a=5$, односно $x=5$ и $y=2$. Ако $2z^2-1=5$, тогаш $z^2=3$, што не е можно. Ако $b=3$, тогаш $c=\frac{10}{3z^2-1}$. Случаите

$$3z^2-1=1,\ 3z^2-1=5 \text{ и } 3z^2-1=10$$

не се можни. Ако $3z^2-1=2$, тогаш $z=1$. Следува дека $c=5$, $a=5$, односно $x=5$ и $y=3$. Ако $b>3$, тогаш од (1) следува $z=1$. Во случајов

$$c=\frac{b^2+1}{b-1}=b+1+\frac{2}{b-1},$$

од каде добиваме $b=2$ или $b=3$, што противречи на $b>3$.

Конечно, решенија на дадената равенка се $(x,y)=\{(5,2),(5,3)\}$.