Републички натпревар 2010

I година

1. Дадена е бесконечна шема во која се запишани природните броеви како на цртежот. Пишувањето на броевите започнува единицата, и потоа се запишуваат сите природни броеви на начин како што е прикажано на цртежот.

21	22	23	24	25	26
20	7	8	9	10	
19	6	1	2	11	
18	5	4	3	12	
17	16	15	14	13	

Редицата и колоната во која се наоѓа единицата е означена како прва редица и прва колона, а секоја друга се брои од неа лево или десно, т.е. горе или долу. На пример, бројот 24 е во втора колона десно и трета редица горе. Каде се наоѓа бројот 2010 во оваа шема.

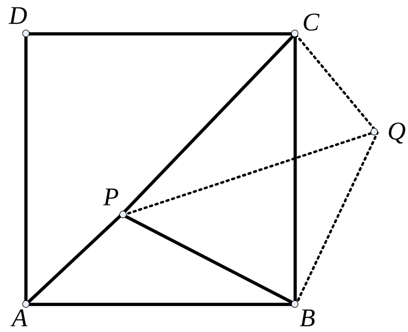
Решение:Од шемата се гледа дека $1=1^2=(2\cdot 1-1)^2$ се наоѓа во прва редица и прва колона, бројот $9=3^2=(2\cdot 2-1)^2$ се наоѓа во втора редица горе и втора колона десно, бројот $25=5^2=(2\cdot 3-1)^2$ се

21	22	23	24	25	26
20	7	8	9	10	
19	6	1	2	11	
18	5	4	3	12	
17	16	15	14	13	

наоѓа во трета редица горе и трета колона десно итн.

Според тоа, бројот $(2\cdot k-1)^2$ се наоѓа во $k-$та редица горе и $k-$та колона десно. Најблизок број од овој облик до 2010 е бројот $2025=45^2=(2\cdot 23-1)^2$, кој се наоѓа во 23-та редица горе и 23-та колона десно.Помалите броеви од него па и 2010 се напишани лево од него, а за да стигнеме до 2010 треба да се вратиме 15 колони лево во истата редица. Според тоа, 2010 се наоѓа во 23-та редица горе и 8-ма колона десно.

2. Даден е квадратот $ABCD$ и точка P во внатрешноста на квадратот т.ш. $\overline{AP}:\overline{BP}:\overline{CP}=1:2:3$. Да се пресмета аголот $\measuredangle APB$.



Решение. Ако $\triangle ABP$ го ротираме околу темето B се додека темето A не се совпадне со темето C (ротација со центар во B и агол за 90°). Со Q да ја означиме новата положба на темето P по ротацијата. Бидејќи аголот $\measuredangle QBC = \measuredangle PBA$, следува дека $\measuredangle QBP = 90^\circ$. Заради ова, бидејќи $\overline{BP} = \overline{BQ}$ имаме

$$\measuredangle PQB = 45^\circ \text{ и } \overline{PQ}^2 = 2\overline{BP}^2 .$$

Од условот на задачата имаме $\overline{BP} = 2\overline{AP}, \overline{CP} = 3\overline{AP}$ па оттука и од претходното равенство добиваме:

$$\overline{PQ}^2 + \overline{CQ}^2 = 8\overline{AP}^2 + \overline{AP}^2 = \overline{CP}^2 .$$

Бидејќи за $\triangle CQP$ важи Питагорина теорема $\measuredangle CQP = 90^\circ$. Конечно,

$$\measuredangle APB = \measuredangle CQB = \measuredangle PQB + \measuredangle CQP = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ .$$

3. Нека $a+b+c=0$ и $a^3+b^3+c^3=0$. Да се докаже дека

$$a^{2009}+b^{2009}+c^{2009}=a^{2011}+b^{2011}+c^{2011}.$$

Решение. Бидејќи $a+b+c=0$ добиваме $a^3+b^3+c^3=3abc$, од каде поради условот следува дека $3abc=a^3+b^3+c^3=0$. Значи барем еден од броевите a, b и c, е нула. Без губење на општоста нека $c=0$, тогаш јасно $b=-a$.

Тогаш,

$$a^{2009}+b^{2009}+c^{2009}=a^{2009}+(-a)^{2009}=a^{2009}-a^{2009}=0.$$

и аналогно се покажува дека и $a^{2011}+b^{2011}+c^{2011}=0$, од каде следува тврдењето на задачата.

4. Двајца велосипедисти се движат од градот A до градот B. Првиот велосипедист, половина од времето се движи со брзина v_1, а другата половина од времето со брзина v_2. Вториот велосипедист, првата половина од патот се движи со брзина v_1, а втората половина од патот со брзина v_2. Кој од нив ќе стаса прв до градот B. (Одговорот да се образложи)

Решение. Нека T е времето за кое ќе стаса првиот велосипедист. Тогаш од условот имаме $v_1\frac{T}{2}+v_2\frac{T}{2}=\overline{AB}$, т.е.

$$T=\frac{2\overline{AB}}{v_1+v_2} \qquad (1)$$

Нека t е времето за кое ќе стаса вториот велосипедист. Тогаш од условот имаме

$$t=\frac{\overline{AB}}{2v_1}+\frac{\overline{AB}}{2v_2}=\frac{\overline{AB}}{2}\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right) \qquad (2)$$

Понатаму од *неравенството меѓу аритметичка и хармониска средина* имаме

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}, \qquad (3)$$

при што знак за равенство важи акко $x=y$

Сега од (1),(2) и (3) имаме

$$t=\frac{\overline{AB}}{2}\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right)\geq\frac{2\overline{AB}}{v_1+v_2}=T.$$

Значи ако $v_1\neq v_2$, првиот велосипедист ќе стаса прв. Инаку, двајцата ќе стасаат истовремено**.**

II година

1. Равенката $x^2+2ax+2a^2+4a+3=0$ има реални решенија За која вредност на реалниот параметар a, збирот на квадратите на нејзините решенија е најголема?

Решение. Равенката има решенија ако $D=4a^2-4(2a^2+4a+3)\geq 0$. Добиваме $a^2+4a+3\leq 0$, односно $(a+1)(a+3)\leq 0$ и оттука $a\in[-3,-1]$. Ако ги означиме решенијата на равенката со x_1 и x_2, за збирот на нивните квадрати имаме $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$. Бидејќи

$$x_1+x_2=-2a \text{ и } x_1x_2=2a^2+4a+3,$$

добиваме

$$x_1^2+x_2^2=4a^2-4a^2-8a-6=-8a-6.$$

Тогаш најголемата вредност на $x_1^2+x_2^2$ се достигнува за $a=-3$, а изнесува 18.

2. Најди ги страните на правоаголен триаголник ако тие се природни броеви и производот на катетите е трипати поголем од периметарот на триаголникот.

Решение. Да ги означиме катетите со a и b, а хипотенузата со c. Според условот во задачата важи $ab=3(a+b+c)$. Бидејќи a и b се природни броеви, следува дека 3 е делител на барем една од катетите**.** Нека $a=3x$, тогаш $c=xb-3x-b$ и имаме

$$(xb-3x-b)^2=(3x)^2+b^2.$$

Добиваме

$$xb(xb-6x-2b+6)=0,$$

а од $x\neq 0$ и $b\neq 0$ следува

$$xb-6x-2b+6=0,$$

равенка која што е еквивалентна со

$$(b-6)(x-2)=6.$$

Оттука,

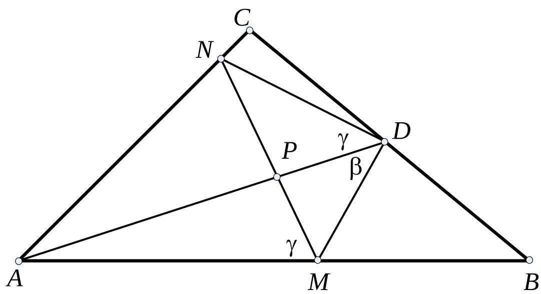
$$\begin{cases}b-6=1\\x-2=6\end{cases}, \begin{cases}b-6=2\\x-2=3\end{cases}, \begin{cases}b-6=3\\x-2=2\end{cases}, \begin{cases}b-6=6\\x-2=1\end{cases},$$

$$\begin{cases}b-6=-1\\x-2=-6\end{cases}, \begin{cases}b-6=-2\\x-2=-3\end{cases}, \begin{cases}b-6=-3\\x-2=-2\end{cases}, \begin{cases}b-6=-6\\x-2=-1\end{cases}.$$

Значи, има три правоаголни триаголници (до складност) со бараните својства, а нивните страни се: $a=24, b=7, c=25$, $a=15, b=8, c=17$ и $a=12, b=9, c=15$.

3. Во триаголникот ABC, AD е симетралата на аголот кај темето A ($D\in BC$). Нека M е точка на страната AB така што $\measuredangle MDA=\measuredangle ABC$, а N е точка на страната AC така што $\measuredangle NDA=\measuredangle BCA$. Ако AD и MN се сечат во точка P, докажи дека $\overline{AD}^3=\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AP}$.

Решение. Аглите кај темињата A, B и C ќе ги означиме со α, β и γ, соодветно. Бидејќи триаголниците AMD и ADB имаат еднакви агли, следува $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AM}}{\overline{AD}}$. Четириаголникот $AMDN$ е тетивен бидејќи $\measuredangle A+\measuredangle D=\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, па $\measuredangle NMA=\measuredangle NDA=\gamma$. Оттука, ACD и AMP се слични триаголници и затоа $\frac{\overline{AD}}{\overline{AP}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AM}}$. Тогаш $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}\cdot\frac{\overline{AD}}{\overline{AP}}=\frac{\overline{AM}}{\overline{AD}}\cdot\frac{\overline{AC}}{\overline{AM}}$ и оттука $\overline{AD}^3=\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AP}$.



4. Да се покаже дека за секои $x,y,z\in\mathbb{R}^+$ важи:

$$\frac{1}{x^2+yz}+\frac{1}{y^2+zx}+\frac{1}{z^2+xy}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right).$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина имаме $\frac{x^2+yz}{2}\geq\sqrt{x^2yz}$, па според тоа

$$\frac{1}{x^2+yz} \le \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2yz}} = \frac{\sqrt{yz}}{2xyz} \le \frac{1}{2xyz}\frac{y+z}{2}.$$

Аналогно добиваме

$$\frac{1}{y^2+zx} \le \frac{1}{2xyz}\frac{z+x}{2} \text{ и } \frac{1}{z^2+xy} \le \frac{1}{2xyz}\frac{x+y}{2}.$$

Со собирање на овие три неравенства го добиваме неравенството кое требаше да се покаже. Равенство се постигнува само во случај да $x=y=z$.

III година

1. Односот на радиусот R на опишаната кружница и радиусот r на впишаната кружница во триаголник $\triangle ABC$ кој е рамнокрак е k. Пресметај ја вредноста $\cos\alpha$ ако со α е означен аголот при основата на $\triangle ABC$.

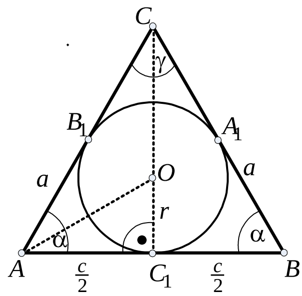
Решение. Нека O е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$, A_1, B_1, C_1 се допирните точки впишаната кружница со страните на триаголникот и $\frac{R}{r}=k$.

Од $\triangle AOC_1$ имаме $\frac{r}{2}=\frac{c}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Од друга страна од синусна теорема имаме

$$\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

$$\frac{c}{\sin(180^\circ-2\alpha)}=2R$$

$$\frac{c}{2}=R\sin\alpha$$



Тогаш

$$r=R\sin 2\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{R}{r}=\frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}=\frac{1}{2\cos\alpha(1-\cos\alpha)}$$

$$2\frac{R}{r}\cos\alpha(1-\cos\alpha)=1$$

$$2k\cos\alpha-2k\cos^2\alpha-1=0.$$

Со решавање на последната квадратна равенка добиваме

$$\cos\alpha=\frac{2k\pm\sqrt{4k^2-8k}}{4k}=\frac{2k\pm2\sqrt{k^2-2k}}{4k},$$

односно $\cos\alpha=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{k^2-2k}}{2k}$.

2. Нека a,b,c се должини на страни во триаголник. Докажи дека

$$\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2}+\frac{b^2+2ca}{c^2+a^2}+\frac{c^2+2ab}{a^2+b^2}>3.$$

Решение. Од неравенството на триаголник имаме

$$a>|b-c|$$

од каде со квадрирање добиваме

$$a^2 > (b-c)^2$$

$$a^2 + 2bc > b^2 + c^2 .$$

Делејќи во последното неравенство со $b^2 + c^2 \neq 0$, добиваме

$$\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2} > 1.$$

По аналогија, ако ги искористиме неравенствата $b > |c-a|$ и $c > |a-b|$ добиваме

$$\frac{b^2+2ca}{c^2+a^2} > 1, \quad \frac{c^2+2ab}{a^2+b^2} > 1,$$

соодветно. Сега јасно е дека даденото неравенство е точно.

Забелешка. Истиот резултат може да се добие со примена на косинусна теорема. При тоа треба да се има во предвид дека на пример

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \text{ и } \cos\alpha < 1.$$

3. Докажи го равенсвото:

$$\frac{1}{\cos 0^\circ \cdot \cos 1^\circ} + \frac{1}{\cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ} + \ldots + \frac{1}{\cos 88^\circ \cdot \cos 89^\circ} = \frac{\cos 1^\circ}{\sin^2 1^\circ} .$$

Решение. Имаме:

$$\sin 1^\circ \left(\frac{1}{\cos 0^\circ \cdot \cos 1^\circ} + \frac{1}{\cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ} + \ldots + \frac{1}{\cos 88^\circ \cdot \cos 89^\circ}\right) =$$

$$= \frac{\sin 1^\circ}{\cos 0^\circ \cdot \cos 1^\circ} + \frac{\sin 1^\circ}{\cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ} + \ldots + \frac{\sin 1^\circ}{\cos 88^\circ \cdot \cos 89^\circ}$$

$$= \frac{\sin(1^\circ - 0^\circ)}{\cos 0^\circ \cdot \cos 1^\circ} + \frac{\sin(2^\circ - 1^\circ)}{\cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ} + \ldots + \frac{\sin(89^\circ - 88^\circ)}{\cos 88^\circ \cdot \cos 89^\circ}$$

$$= \frac{\sin 1^\circ \cos 0^\circ - \cos 1^\circ \sin 0^\circ}{\cos 0^\circ \cdot \cos 1^\circ} + \frac{\sin 2^\circ \cos 1^\circ - \sin 2^\circ \cos 1^\circ}{\cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ} + \ldots + \frac{\sin 89^\circ \cos 88^\circ - \cos 89^\circ \sin 88^\circ}{\cos 88^\circ \cdot \cos 89^\circ}$$

$$= \operatorname{tg} 1^\circ - \operatorname{tg} 0^\circ + \operatorname{tg} 2^\circ - \operatorname{tg} 1^\circ + \ldots + \operatorname{tg} 89^\circ - \operatorname{tg} 88^\circ$$

$$= \operatorname{tg} 89^\circ - \operatorname{tg} 0^\circ = \operatorname{tg} 89^\circ = \operatorname{ctg} 1^\circ = \frac{\cos 1^\circ}{\sin 1^\circ}$$

од каде се добива бараното равенство.

4. Без употреба на калкулатор да се докаже дека $\lg^3 9 > \lg 7$.

Решение. Имаме

$$\lg^3 9 = \lg^3(10 \cdot 0.9) = (\lg 10 + \lg 0{,}9)^3 = (1 + \lg 0{,}9)^3 = 1 + 3\lg 0.9 + 3\lg^2 0.9 + \lg^3 0.9$$

Бидејќи $0{,}1 < 0.9 < 1$ имаме дека $-1 < \lg 0.9 < 0$ од каде следува дека

$$\lg^2 0.9 + \lg^3 0.9 > 0$$

и уште повеќе

$$3\lg^2 0.9 + \lg^3 0.9 > 0 .$$

Сега имаме

$$\begin{aligned}\lg^3 9 &= 1+3\lg 0,9+3\lg^2 0,9+\lg^3 0,9\\ &> 1+3\lg 0,9 = 1+\lg 0,729\\ &= \lg 10+\lg 0,729 = \lg 7,29 > \lg 7\end{aligned}.$$

IV година

1. Определи ги сите реални броеви m за кои равенката

$$x^4-(3m+2)x^2+m^2=0$$

има 4 реални корени кои што се последователни членови на аритметичка прогресија.

Решение. Нека a_1,a_2,a_3,a_4 се последователни членови на аритметичка прогресија, корени на равенката

$$x^4-(3m+2)x^2+m^2=0.$$

Ако $2b$ е разлика на прогресијата и $s=\frac{a_2+a_3}{2}$ тогаш $a_1=s-3b,\ a_2=s-b,$ $a_3=s+b,\ \ a_4=s+3b$.

Користејќи ги Виетовите врски, од $a_1+a_2+a_3+a_4=0$ следува дека $s=0$ и $a_1=-3b,\ a_2=-b,\ a_3=b,\ \ a_4=3b$.

Од тоа што a_1,a_2,a_3,a_4 се корени на почетната равенка, следува дека

$$(x+3b)(x+b)(x-b)(x-3b)=x^4-(3m+2)x^2+m^2$$

Односно

$$x^4-10b^2x^2+9b^4=x^4-(3m+2)x^2+m^2,$$

од каде што се добива системот равенки

$$\begin{cases}3m+2=10b^2\\ m^2=9b^4\end{cases}.$$

Со решавање на системот се добива $m=6$ или $m=-\frac{6}{19}$.

2. Да се реши равенката

$$(x^2+x+2)^{x^2+x+1}=9.$$

Решение. Бидејќи $x^2+x+2=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}>1$ за секој реален број x, добиваме дека дефиниционата област на дадената равенка е множеството реални броеви.

Нека $f(x)=x^{x-1}$, $g(x)=x^2+x+2$ и $h(x)=3$.Тогаш дадената равенка можеме да ја запишеме во облик

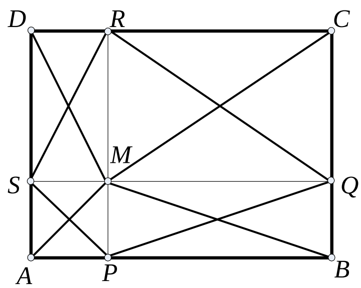
$$f(g(x))=f(h(x)) \qquad (1)$$

Понатаму нека $1 < x_1 < x_2$ тогаш имаме $f(x_1) = x_1^{x_1 - 1} < x_1^{x_2 - 1} < x_2^{x_2 - 1} = f(x_2)$, па следува дека функцијата f е растечка на множеството вредности што ги примаат функциите $g(x)$ и $h(x)$.

Според ова и (1) мора да важи $g(x) = h(x)$ од каде добиваме $x^2 + x + 2 = 3$, т.е. $x^2 + x - 1 = 0$ односно ги имаме решенијата $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

3. Нека $ABCD$ е правоаголник и M е точка од неговата внатрешност. Да се покаже дека

$$|MA||MC| + |MB||MD| \geq P_{ABCD}.$$



Решение. Низ точката M ги повлекуваме двете прави паралелни на страните на правоаголникот. Нека тие ги сечат AB, BC, CD, DA во точките P, Q, R, S, соодветно. Неравенството кое треба да се покаже е всушност теоремата на Птоломеј за четириаголникот $PQRS$.

4. Конечната низа $a_0, a_1, ..., a_n$ е зададена на следниот начин:

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_k = a_{k-1} + \frac{1}{n} a_{k-1}^2 \quad (k = 1, 2, ..., n)$$

Докажи дека важи $1 - \frac{1}{n} < a_n < 1$.

Решение. Од самата дефиниција на низата следува дека $\frac{1}{2} = a_0 < a_1 < ... < a_n$. Равенството $a_k = a_{k-1} + \frac{1}{n} a_{k-1}^2$ е еквивалентно со равенството $\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} = \frac{1}{n + a_{k-1}}$. Од позитивноста на низата и од $\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} = \frac{1}{n + a_{k-1}}$ следува дека

$$\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} < \frac{1}{n}, \quad k = 1, ..., n. \qquad (1)$$

Со собирање на неравенствата се добива $\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} < 1$, односно $a_n < 1$. Со тоа десното неравенство е покажано.

Да забележиме дека од $\frac{1}{2} = a_0 < a_1 < ... < a_n < 1$ следува

$$\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} > \frac{1}{n+1}, \quad k = 1, ..., n. \qquad (2)$$

Со собирање на сите неравенствата се добива $\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} > \frac{n}{n+1}$, односно

$$a_n > \frac{n+1}{n+2} > \frac{n-1}{n}.$$

Со тоа е покажано и левото неравенство.