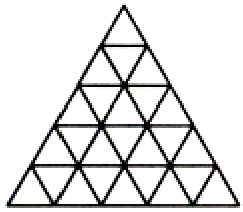
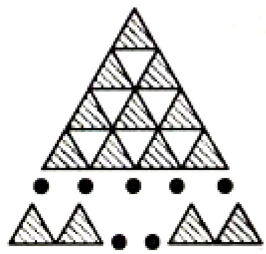
JMMO 2000

1. Рамностран триаголник со страна $n, (n \in \mathbb{N})$ со прави паралелни на неговите страни е поделен на рамнострани триаголници со должина на страна 1 (за $n = 5$ види цртеж десно). Некои од новодобиените отсечки со должина 1 и крајни точки во темињата на малите триаголници ги боиме со црвена боја. Колку најмногу отсечки со должина 1 и крајни точки во темињата на малите триаголници може да обоиме така што да не постои рамностран триаголник со страна 1 чии страни се обоени?



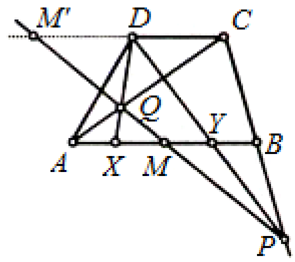
Решение. Бројот на отсечките со должина 1, паралелни на секоја страна на триаголникот е еднаков на $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$, што значи дека вкупно имаме $\frac{3n(n+1)}{2}$ отсечки со должина 1. Секои две отсечки што се паралелни со две страни на почетниот триаголник не формираат мал триаголник, бидејќи секој мал триаголник се состои од три отсечки што се паралелни на сите три страни. Значи, сигурно може да се обојат $\frac{2}{3} \cdot \frac{3n(n+1)}{2} = n(n+1)$ отсечка со должина 1.

Ќе докажеме дека повеќе отсечки не може да се обојат. Да ги штрафираме триаголниците со доллжина на страна 1 како на цртежот десно. Овие триаголници ги содржат сите отсечки со должина 1, при што секоја отсечка припаѓа точно на еден мал триаголник. Затоа за да не може да се состави ниту еден од штрафираните триаголници, во секој триаголник може да се обојат најмногу две отсечки. Според тоа, бројот на обоените отсечки не може да биде поголем од $\frac{2}{3}$ од вкупниот број отсечки, односно од $\frac{2}{3} \cdot \frac{3n(n+1)}{2} = n(n+1)$.



2. Нека M е средина на основата AB на трапезот $ABCD\,(\overline{AB} > \overline{CD})$, а P е произволна точка од правата BC. Ако $PM \cap AC = Q, DQ \cap AB = X$ и $DP \cap AB = Y$, докажи дека точката M е средина на отсечката XY.

Решение. Нека $PM \cap CD = M'$. Од $\triangle PDM' \sim \triangle PYM$ следува



$$\overline{MY}:\overline{M'D}=\overline{PY}:\overline{PD}. \qquad (1)$$

Од $\triangle PCD \sim \triangle PBY$ следува

$$\overline{PY}:\overline{PD}=\overline{PB}:\overline{PC}. \qquad (2)$$

Понатаму, од $\triangle PCM' \sim \triangle PBM$ следува

$$\overline{PB}:\overline{PC}=\overline{MB}:\overline{M'C}, \qquad (3)$$

а од $\overline{AM}=\overline{MB}$ следува дека

$$\overline{MB}:\overline{M'C}=\overline{AM}:\overline{M'C}, \qquad (4)$$

Сега, од $\triangle AMQ \sim \triangle CM'Q$ следува

$$\overline{MA}:\overline{M'C}=\overline{MX}:\overline{M'D}. \qquad (5)$$

Конечно, од равенствата (1) – (5) добиваме

$$\frac{\overline{MY}}{\overline{M'D}}=\frac{\overline{PY}}{\overline{PD}}=\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}=\frac{\overline{MB}}{\overline{M'C}}=\frac{\overline{MA}}{\overline{M'C}}=\frac{\overline{MX}}{\overline{M'D}},$$

па затоа $\overline{MX}=\overline{MY}$, т.е. точката M е средина на отсечката XY.

3. Дадени се десет природни броеви $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{10}$ кои не се поголеми од 90. Докажи дека количникот на некои два од нив е број x за кој важи $\frac{2}{3} \le x \le \frac{3}{2}$.

Решение. Од $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{10}$ следува дека секој од броевите

$$\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \ldots, \frac{a_{10}}{a_9}, \qquad (1)$$

е поголем или еднакв на 1, што значи дека е поголем и од $\frac{2}{3}$. Треба да докажеме дека некој количник е помал или еднаков на $\frac{3}{2}$. Нека претпоставиме дека $\frac{a_{i+1}}{a_i} > \frac{3}{2}$, за $i = 1,2,\ldots,9$. Тогаш од $a_1 \ge 1$ имаме $a_2 > \frac{3}{2}$ и како $a_2 \in \mathbb{N}$ следува дека $a_2 \ge 2$. Понатаму, $\frac{a_3}{a_2} > \frac{3}{2}$, па затоа

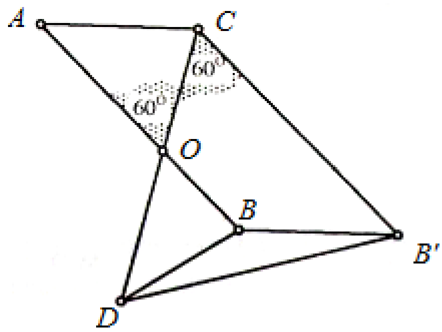
$$a_3 > \frac{3}{2}a_2 \ge \frac{3}{2}\cdot 2 = 3, \text{ т.е. } a_3 \ge 2.$$

Аналогно добиваме

$$a_4 \ge 7, a_5 \ge 11, a_6 \ge 17, a_7 \ge 26, a_8 \ge 40, a_9 \ge 61 \text{ и } a_{10} \ge 92,$$

што противречи на условот на задачата, т.е. дека сите броеви се помали од 90. Конечно, од добиената противречност следува дека барем еден од количниците (1) мора да е помал или еднаков на $\frac{3}{2}$.

4. Отсечките AB и CD се сечат во точката O. Ако $\overline{AB}=\overline{CD}=1$ и $\measuredangle AOC=60^\circ$, докажи дека $\overline{AC}+\overline{BD}\geq 1$.



Решение. Нека B' е четвртото теме на паралелограмот $ABB'C$. Тогаш $\overline{AC}=\overline{BB'}$. Од $\triangle BDB'$ следува

$$\overline{BD}+\overline{BB'}\geq \overline{B'D},$$

односно

$$\overline{BD}+\overline{AC}\geq \overline{B'D}.$$

Понатаму, $\measuredangle AOC=\measuredangle OCB'$, како наизменични агли. Според тоа, $\measuredangle DCB'=60^\circ$. Понатаму, од $\overline{AB}=\overline{CD}$ и $\overline{AB}=\overline{CB'}$ следува $\overline{CD}=\overline{CB'}$, што значи дека $\triangle DB'C$ е рамнокрак со агол при врвот $\measuredangle DCB'=60^\circ$. Значи, $\triangle DB'C$ е рамностран триаголник и $\overline{DB'}=1$. Сега од $\overline{AC}=\overline{BB'}$ и $\overline{BD}+\overline{BB'}\geq \overline{B'D}=1$ следува $\overline{AC}+\overline{BD}\geq 1$.

5. Нека a,b,c се ненулти цели броеви такви што $a\neq c$ и $\frac{a}{c}=\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}$.

Докажи дека $a^2+b^2+c^2$ е сложен број.

Решение. Равенството $\frac{a}{c}=\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}$ е еквивалентно со равенството

$$(a-c)(b^2-ac)=0.$$

Бидејќи $a\neq c$, од последното равенство следува $b^2=ac$ и затоа

$$a^2+b^2+c^2=a^2+2b^2+c^2-b^2=a^2+2ac+c^2-b^2$$
$$=(a+c)^2-b^2=(a+b+c)(a-b+c).$$

Нека претпоставиме дека $a^2+b^2+c^2$ е прост број. Тогаш можни се следниве четири случаи:

i) $a-b+c=1$ и $a^2+b^2+c^2=a+b+c$,

ii) $a+b+c=1$ и $a^2+b^2+c^2=a-b+c$,

iii) $a-b+c=-1$ и $a^2+b^2+c^2=-(a+b+c)$,

iv) $a+b+c=-1$ и $a^2+b^2+c^2=-(a-b+c)$.

Во случаите $i)$ и $ii)$ со собирање на равенствата добиваме

$$a^2+b^2+c^2=2(a+c)+1\text{, т.е. }(a-1)^2+b^2+(c-1)^2=3,$$

што е можно само ако сите три собирци се еднакви на 1, од каде следува $a=1=c$, што е противречност. Во случаите *iii*) и *iv*) со собирање на равенствата добиваме

$$a^2+b^2+c^2+2(a+c)+1=0\text{, т.е. }(a+1)^2+b^2+(c+1)^2=1,$$

што е можно само ако двата собирци се еднакви на нула, а третиот е еднаков на 1. Последното противречи на $a\neq c$ и $b\neq 0$ (Зошто?).

Конечно, од претходните разгледувања следува дека $a^2+b^2+c^2$ е прост број.