О ИЗРАЧУНАВАЊУ НЕКИХ КОНАЧНИХ СУМА

мр Слађана Димитријевић, **Крагујевац**

Верујемо да вам је добро позната формула

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

као и анегдота везана за њу и младог Гауса. Ово је вероватно и први пример израчунавања коначних сума са којим сте се срели, још у основној школи. Ако не пре, неколико година касније, у трећем разреду гимназије, при обради теме математичка индукција, сигурно ћете наићи на задатке сличне следећем.

Задатак 1. Доказати да за све природне бројеве важи:

(а) $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;

(б) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(в) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$;

(г) $1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$;

(д) $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

Доказивање ових једнакости (применом индукције) углавном не представља већи проблем, међутим, овај задатак неминовно отвара још једно питање: Како су дате формуле добијене, тј. како наћи коначне суме из претходних једнакости?

Постоји више одговора, а ми ћемо се овог пута задовољити само једним. То, додуше, никако не значи да потрага наших читалаца треба да се заустави на том једном решењу.

Ради једноставнијег записа означимо са S_n^1, S_n^2, S_n^3 и S_n^4 суме из (а), (б), (в) и (г) респективно.

Основне полуге нашег решења су чињеница да се n^k може представити као линеарна комбинација биномних коефицијената: $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, $\binom{n}{3}$, $\ldots$, $\binom{n}{k}$

$$(1)\qquad n^k=A_k\binom{n}{k}+A_{k-1}\binom{n}{k-1}+\cdots+A_1\binom{n}{1},\quad k,n\in\mathbb{N},\ k\leqslant n,\ A_k\in\mathbb{Z}$$

и позната једнакост за биномне коефицијенте:

$$(2)\qquad \binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\cdots+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1},\quad k,n\in\mathbb{N},\ k\leqslant n.$$

Размотримо сада случајеве S_n^1 и S_n^2.

Како је $1^1=\binom{1}{1}, 2^1=\binom{2}{1},\ldots,n^1=\binom{n}{1}$, сабирајући ових n једнакости и користећи релацију (2) закључујемо да је

$$S_n^1=\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\binom{3}{1}+\cdots+\binom{n}{1}=\binom{n+1}{2}=\frac{n(n+1)}{2}.$$

За израчунавање суме S_n^2 полазимо од једначине $k^2 = A_2\binom{k}{2} + A_1\binom{k}{1}$, где су A_2 и A_1 непознате константе које прво морамо да одредимо. Претходна једначина је еквивалентна са $2k^2 = k^2 \cdot A_2 + k(2A_1 - A_2)$, а како је свако $k \in \mathbb{N}$ решење ове једначине, закључујемо да је (два полинома су једнака ако су им одговарајући коефицијенти једнаки) $A_2 = 2$, $2A_1 - A_2 = 0$, односно $A_2 = 2, A_1 = 1$. Дакле, за сваки природан број k важи:

$$k^2 = 2\binom{k}{2} + \binom{k}{1},$$

одакле добијамо $1^2 = 0 + \binom{1}{1}$, $2^2 = 2\binom{2}{2} + \binom{2}{1}$, $\ldots$, $n^2 = 2\binom{n}{2} + \binom{n}{1}$. Када саберемо ове једнакости добијамо

$$S_n^2 = 2\left(\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{n}{2}\right) + \left(\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \cdots + \binom{n}{1}\right),$$

одакле применом једнакости (2) лако закључујемо да је $S_n^2 = 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}$, односно

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Показаним поступком се проблем израчунавања суме $m-$тих степена првих n природних бројева своди на решавање „релативно једноставног" система од m линеарних једначина.

Поред тога, служећи се истом идејом решавање задатка под (д) и њему сличних је врло елегантно, што ћемо и показати.

Нека је $S = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$. Тада је

$$\frac{S}{3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3!} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3!} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{3!} + \cdots + \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3!}$$

$$= \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \cdots \binom{n+2}{3} = \binom{n+3}{4}.$$

Дакле, $S = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

Вредним читаоцима предлажемо да се позабаве следећим задацима.

Задатак 2. Наћи суму $S = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \cdots + (n-1)n^2$.

Решење: $S = (S_n^3 - 1) - (S_n^2 - 1) = S_n^3 - S_n^2 = \dfrac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{12}$.

Задатак 3. Наћи суму $S = 1^3 + 4^3 + \cdots + 100^3$.

Решење: $S = 27S_{34}^3 - 54S_{34}^2 + 36S_{34}^1 - 8 \cdot 34$.

Задатак 4. Наћи суму $S = \dfrac{1^2}{1 \cdot 3} + \dfrac{2^2}{3 \cdot 5} + \dfrac{3^2}{5 \cdot 7} + \cdots + \dfrac{n^2}{(2n-1) \cdot (2n+1)}$.

Решење. Уочимо да се општи члан низа може написати у следећем облику

$$\frac{k^2}{(2k-1)\cdot(2k+1)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right).$$

Стога је

$$S = \frac{1}{4}\cdot n + \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

Задатак 5. Наћи следеће суме:

(1) $S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \cdots + 2^2 - 1^2$;
(2) $S = 1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6 + \cdots + n(n+3)$;
(3) $S = 2\cdot 1^2 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 3^2 + \cdots + 101\cdot 100^2$;
(4) $S = 8n^3 - (2n-1)^3 + \cdots + 2^3 - 1^3$;
(5) $S = \dfrac{1}{1\cdot 4} + \dfrac{1}{2\cdot 5} + \dfrac{1}{3\cdot 6} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+3)}$;

(6) $S = \dfrac{1}{1\cdot 3\cdot 5} + \dfrac{1}{3\cdot 5\cdot 7} + \dfrac{1}{5\cdot 7\cdot 9} + \cdots + \dfrac{1}{1999\cdot 2001\cdot 2003}$.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2006/07 година