XXXIII РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

VI одделение

1. Стефан, Филип и Никола понеле на екскурзија вкупно 222 денари. Стефан потрошил $\frac{1}{3}$ од својата сума, Филип $\frac{1}{5}$ од својата сума, а Никола $\frac{7}{15}$ од својата сума. После тоа им останале еднакви суми на пари. По колку пари понел секој од нив на екскурзијата?

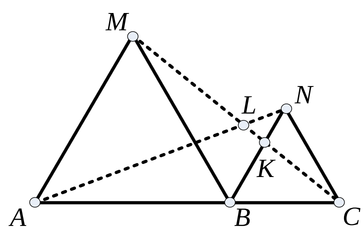
Решение. Нека Стефан понел x денари, Филип понел y денари и Никола понел z денари. Од условот на задачата имаме дека

$$x+y+z=222 \qquad (1)$$

По трошењето на парите на Стефан му останале $\frac{2}{3}x$ денари, на Филип му останале $\frac{4}{5}y$ денари, а на Никола му останале $\frac{8}{15}z$ денари. Од условот на задачата имаме дека $\frac{2}{3}x=\frac{4}{5}y=\frac{8}{15}z$, од каде $5x=6y=4z$. Значи $y=\frac{5}{6}x$ и $z=\frac{5}{4}x$, па со замена во (1) се добива $x+\frac{5}{6}x+\frac{5}{4}x=222$. Со решавање на последната равенка се добива $x=72$, од каде $y=\frac{5}{6}\cdot 72=60$ и $z=\frac{5}{4}\cdot 72=90$. Значи, Стефан понел 72 денари, Филип понел 60 денари и Никола понел 90 денари.

2. Точката B е внатрешна за отсечката $\overline{AC}$. Во една иста полурамнина во однос на правата AC се конструирани рамностраните триаголници ΔABM и ΔBCN. Правите AN и CM се сечат во точката L. Определи го аголот $\measuredangle CLN$.

Решение. Прво да забележиме дека аголот $\measuredangle MBN=60°$. Ова значи дека аголот $\measuredangle ABN=\measuredangle MBC=120°$. Од рамностраноста на триаголниците ABM и BCN имаме дека $\overline{AB}=\overline{BM}$ и $\overline{BC}=\overline{BN}$. Од признакот за складност САС имаме дека $\triangle ABN\cong\triangle MBC$, од каде следува дека $\measuredangle ANB=\measuredangle MCB=\alpha$. Нека K е пресечната точка на правите MC и BN. Од $\measuredangle BKC=\measuredangle MKN=\beta$ (како накрсни агли), во $\triangle BKC$ имаме дека



$$\alpha+\beta=180^\circ-60^\circ=120^\circ .$$

Конечно од $\triangle LKN$ добиваме дека

$$\measuredangle KLN=180^\circ-(\alpha+\beta)=60^\circ ,$$

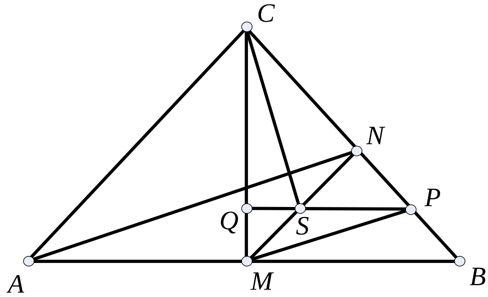
што значи дека $\measuredangle CLN=60^\circ$.

3. Во едно училиште учат помалку од 400 ученици во шесто одделение поделени во неколку паралелки. Шест од паралелките имаат по еднаков број на ученици и тие шест паралелки имаат вкупно повеќе од 150 ученици. Во останатите паралелки во шесто одделение има вкупно за 15% повеќе ученици отколку во овие шест паралелки заедно. Колку вкупно ученици во шесто одделение има во ова училиште?

Решение. Да го означиме со n вкупниот број на ученици во шесте паралелки. Значи, $6|n$. Од тоа што во останатите паралелки има вкупно за 15% повеќе ученици отколку во овие шест паралелки имаме дека $15\%\cdot n=\frac{15}{100}\cdot n=\frac{3}{20}\cdot n$ треба да е природен број, од каде следи дека $20|n$. Од $6|n$ и $20|n$ следи дека $60|n$, односно $n=60k$. Од условот на задачата имаме дека $n>150$ и $n+n+15\%\cdot n=2{,}15n<400$. Најмалиот природен број делив со 60 и поголем од 150 е $n=180$ и за него имаме дека $2{,}15n=2{,}15\cdot 180=387$. Следниот природен број делив со 60 е $n=240$, но за $n\geq 240$ имаме дека $2{,}15n\geq 2{,}15\cdot 240=516$, па условот $2{,}15n<400$ не е исполнет. Значи, вкупниот број на ученици во шесто одделение во ова училиште е 387 ученици.

4. Во рамнокракиот триаголник ABC, точката M е средина на основата $\overline{AB}$. Нека N е точка од кракот BC, така што $MN\perp BC$ и нека S е средина на отсечката $\overline{MN}$. Докажи дека правата AN е нормална на правата CS.

Решение. Од услов на задачата имаме дека $\overline{AM}=\overline{MB}$, $CM\perp AB$ ($\triangle ABC$ е рамнокрак со основа AB), $MN\perp BC$ и $\overline{MS}=\overline{SN}$. На страната BC избираме точка P така да $MP\parallel AN$. Во $\triangle ANB$ имаме дека $\overline{AM}=\overline{MB}$ и $MP\parallel AN$, од



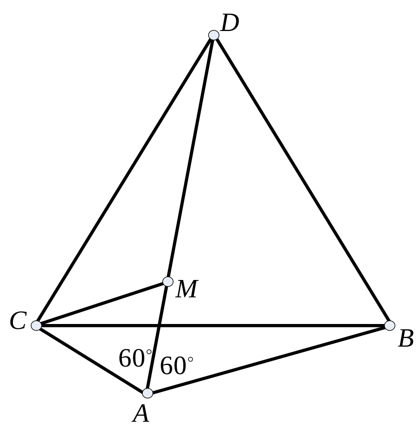
каде следи дека MP е средна линија во $\triangle ANB$ и дека $\overline{NP}=\overline{PB}$. Во $\triangle MBN$ имаме дека $\overline{MS}=\overline{SN}$ и $\overline{NP}=\overline{PB}$, од каде следи дека SP е средна линија во $\triangle MBN$ и дека $SP \parallel MB$. Нека Q е пресечната точка на правите SP и CM. Од $CM \perp AB$ и $PQ \parallel AB$, следи дека $PQ \perp CM$. Во триаголникот $\triangle MPC$ имаме дека $MN \perp PC$, $PQ \perp CM$ и $\{S\}=MN \cap PQ$, од каде следува дека S е ортоцентар во $\triangle MPC$. Значи, $CS \perp MP$, а од $MP \parallel AN$ ќе следува дека $CS \perp AN$, што требаше да се докаже.

VII одделение

1. Дали збирот $1^{2008}+2^{2008}+3^{2008}+4^{2008}+5^{2008}+6^{2008}$ е делив со 5? Образложи го одговорот.

Решение. Најнапред да забележиме дека $1^{2008}=1$. Бидејќи $2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$, $2^5=32$, ..., заклучуваме дека степените на бројот 2 завршуваат на 2, 4, 8 и 6 и по тој ред се повторуваат во зависност од тоа дали степеновиот показател при делење со 4 дава остаток 1, 2, 3 или е делив со 4. Од тоа што 2008 е делив со 4, имаме дека 2^{2008} завршува на 6. Аналогно, 3^{2008} завршува на 1, 4^{2008} завршува на 6, 5^{2008} завршува на 5 и 6^{2008} завршува на 6. Бидејќи $1+6+1+6+5+6=25$, односно завршува на 5, следува дека и сумата $1^{2008}+2^{2008}+3^{2008}+4^{2008}+5^{2008}+6^{2008}$ завршува на 5 т.е. е делива со 5.

2. Даден е триаголникот ABC со $\measuredangle BAC=120^\circ$. На симетралата на $\measuredangle BAC$ избрана е точка D, така да $\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{AC}$. Докажи дека $\triangle BCD$ е рамностран.



Решение. На AD бираме точка M така да $\overline{AM}=\overline{AC}$. Бидејќи, $\measuredangle MAC=60^\circ$, следи дека $\triangle ACM$ е рамностран. Бидејќи,

$$\measuredangle CAB=\measuredangle CMD=120^\circ,$$

а исто така $\overline{MC}=\overline{AC}$ и $\overline{AB}=\overline{MD}$, следува дека $\triangle CAB\cong\triangle CMD$. Од последното следи дека $\overline{BC}=\overline{CD}$ и $\measuredangle ACB=\measuredangle MCD$. На крај, од

$$\measuredangle ACM=\measuredangle ACB+\measuredangle BCM=\measuredangle MCD+\measuredangle BCM=\measuredangle BCD=60^\circ$$

и $\overline{BC}=\overline{CD}$ следува дека $\triangle BCD$ е рамностран.

3. Најди ги цифрите *A, B, C*, за да биде точна постапката за множење на два трицифрени броја дадена со

$$\begin{array}{r}\underline{\overline{ABC}\cdot\overline{BAC}}\\ ----\\ --A\\ \underline{---B}\\ ------\end{array}$$

каде $\overline{ABC}\cdot C=----$, $\overline{ABC}\cdot A=--A$, $\overline{ABC}\cdot B=---B$. Различна буква означува различна цифра и секоја цртичка означува една цифра.

Решение. Од тоа што броевите $\overline{ABC}$ и $\overline{BAC}$ се трицифрени, следува дека $A\neq 0$ и $B\neq 0$. Исто така се добива дека $C\neq 1$, бидејќи за $C=1$ равенството $\overline{ABC}\cdot C=----$ не е можно, затоа што $\overline{AB1}\cdot 1=\overline{AB1}$, што не е четирицифрен број.

Од равенството $\overline{ABC}\cdot A=--A$, ако $A>3$ следува дека

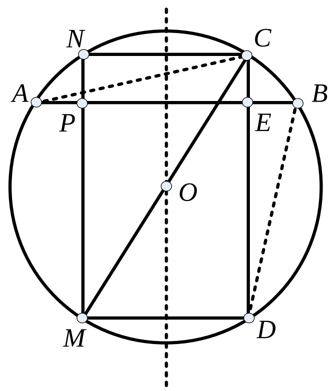
$$\overline{ABC}\cdot A>400\cdot 4=1600>999.$$

Значи, $A\leq 3$. Ако $A=1$, тогаш и $C=1$, што не е можно. Затоа $A=2$ или $A=3$. Ако $A=3$, тогаш од $\overline{ABC}\cdot A=--A$ ќе мора $C=1$ што не е можно. Затоа мора $A=2$. Сега, од $\overline{2BC}\cdot 2=--2$, следува $C=1$ или $C=6$. Значи мора $C=6$.

На крај, од равенството $\overline{2B6}\cdot B=---B$, мора $B\in\{1,2,4,6,8\}$. За $B=1$, добиениот број не е четирицифрен. Од останатите случаи со проверка се добива дека $B=8$.

4. Во круг со дијаметар d, тетивите *AB* и *CD* се сечат под прав агол во точката E која не се совпаѓа со центарот на кругот. Докажи дека $\overline{AE}^2+\overline{BE}^2+\overline{CE}^2+\overline{DE}^2=d^2$.

Решение. За дадените тетиви важи $AB\perp CD$ и $\{E\}=AB\cap CD$, $E\neq O$, каде O е центарот на кругот. Правата низ точката *D*, повлечена паралелно со *AB*, нека ја сече кружницата во точка *M*, а потоа правата низ *M*, паралелна со *CD*, нека ја сече кружницата во точката *N*.



Бидејќи $\measuredangle MDC = 90°$, отсечката *MC* минува низ центарот на кругот, а тоа значи дека $\measuredangle MNC = 90°$. Според тоа, четириаголникот *MDCN* е правоаголник. Увидувајќи дека $\overline{AP} = \overline{EB}$ (точките *P* и *E*, а исто така и точките *A* и *B* се осносиметрични точки во однос на оската на симетрија на правоаголникот *MDCN* која минува низ центарот *O* и е паралелна со страните *DC* и *MN*),

$$\overline{CD} = \overline{CE} + \overline{ED} \text{ и}$$

$$\overline{MD} = \overline{PE} = \overline{AE} - \overline{AP} = \overline{AE} - \overline{EB},$$

од ΔMDC имаме дека

$$d^2 = \overline{MD}^2 + \overline{CD}^2 = (\overline{AE} - \overline{EB})^2 + (\overline{CE} + \overline{ED})^2$$

$$= \overline{AE}^2 + \overline{EB}^2 - 2 \cdot \overline{AE}\,\overline{EB} + \overline{CE}^2 + \overline{ED}^2 + 2 \cdot \overline{CE}\,\overline{ED}.$$

Потоа**,** $\measuredangle BAC = \measuredangle BDC$ како периферни агли над лакот *BC*, па од сличноста на $\triangle AEC \sim \triangle BED$, добиваме $\overline{AE} : \overline{CE} = \overline{ED} : \overline{BE}$, односно $\overline{AE} \cdot \overline{EB} = \overline{CE} \cdot \overline{ED}$, и со замена во последното равенство се добива дека

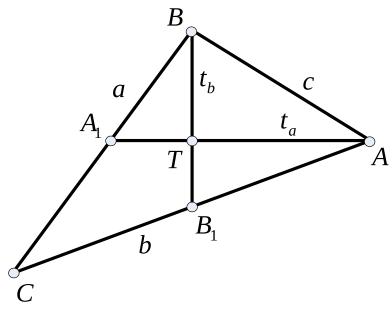
$$\overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{DE}^2 = d^2,$$

што требаше да се докаже.

VIII одделение

1. Дадени се должините на две страни *a* и *b* на триаголникот ΔABC. Тежишните линии што се спуштени кон дадените страни се заемно нормални. Пресметај ја должината на третата страна *c* со помош на должините на страните *a* и *b*.

Решение. Нека T е тежиштето на $\triangle ABC$, а тежишните линии кон страните $\overline{BC} = a$ и $\overline{AC} = b$ нека се $\overline{AA_1} = t_a$ и $\overline{BB_1} = t_b$ соодветно. Бидејќи $\overline{A_1T} = \frac{1}{3}t_a$ и $\overline{TB} = \frac{2}{3}t_b$, од правоаголниот триаголник $\triangle BA_1T$ имаме



$$(\tfrac{a}{2})^2 = (\tfrac{1}{3}t_a)^2 + (\tfrac{2}{3}t_b)^2 .$$

Бидејќи $\overline{AT} = \frac{2}{3}t_a$ и $\overline{TB_1} = \frac{1}{3}t_b$, од правоаголниот триаголник ΔB_1AT имаме

$$(\tfrac{b}{2})^2 = (\tfrac{2}{3}t_a)^2 + (\tfrac{1}{3}t_b)^2 .$$

Со собирање на двете равенства се добива

$$\tfrac{a^2+b^2}{4} = \tfrac{5}{9}(t_a^2 + t_b^2),$$

односно

$$t_a^2 + t_b^2 = \tfrac{9}{20}(a^2 + b^2).$$

Конечно, од правоаголниот триаголник ΔABT имаме

$$c^2 = (\tfrac{2}{3}t_a)^2 + (\tfrac{2}{3}t_b)^2 = \tfrac{4}{9}(t_a^2 + t_b^2) = \tfrac{a^2+b^2}{5},$$

од каде $c = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}$.

2. Сакајќи да ја дознае брзината со која се движел автобусот во кој се вози, патникот погледнал низ прозорецот и на километарската табла покрај патот (која ја означува оддалеченоста од градот од кој тргнал) видел двоцифрен број. Точно после еден час, повторно погледнал низ прозорецот и на километарската табла видел трицифрен број напишан со помош на истите две цифри како и пред еден час, но во обратен редослед и меѓу нив имало нула. Патникот ја пресметал брзината на автобусот и заспал. Кога се разбудил после точно два часа и погледнал низ прозорецот, на километарската табла видел трицифрен број на кој првата и последната цифра му биле исти како и на бројот што го видел пред два часа, само што средната цифра била различна од нула. Ако се знае дека автобусот се движел со постојана брзина, одреди ја брзината на автобусот и броевите кои патникот ги видел на километарските табли покрај патот.

Решение. Првиот пат патникот го видел бројот $10x+y,\ 0<x\le 9,$ $0\le y\le 9$. После еден час го видел бројот $100y+x,\ y\ne 0$. За тоа време автобусот поминал $(100y+x)-(10x+y)=9(11y-x)km$. Бидејќи автобусот се движел со постојана брзина, за наредните два часа автобусот поминал $2\cdot 9(11y-x)=18(11y-x)$, а патникот го видел бројот $100y+10z+x,\ 0<z\le 9$. Добиваме

$$18(11y-x)=(100y+10z+x)-(100y+x), \text{ т.е. } 9(11y-x)=5z.$$

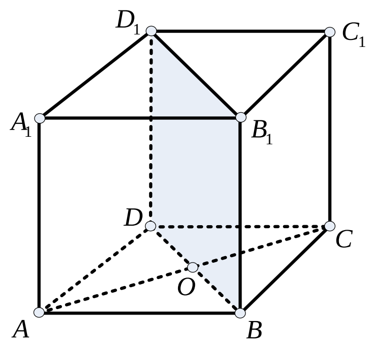
Последната равенка е можна само ако $z=9$ и $11y-x=5$. Од тоа што $0<x,y\leq 9$ се добива $x=6$ и $y=1$. Значи, брзината v на автобусот се добива од $9(11y-x)=1\cdot v$, од каде $v=45km/h$, а броевите кои патникот ги видел на километарските табли се 61, 106 и 196.

3. Основата на права четириаголна призма е ромб со плоштина $\frac{2}{3}k^2$, $k>0$. Помалиот дијагонален пресек на призмата е квадрат со плоштина k^2.

а) Изрази ги плоштината и волуменот на призмата преку k.

б) За која вреднрост на k, мерните броеви на плоштината и волуменот на призмата се еднакви меѓу себе?

Решение. Од тоа што помалиот дијагонален пресек на призмата е квадрат со површина k^2, следува дека висината на призмата $H=k$ и помалата дијагонала на нејзината основа $d_1=k$. Основата на призмата е ромб со плоштина $B=\frac{2}{3}k^2$, од каде се добива $\frac{2}{3}k^2=\frac{d_1\cdot d_2}{2}$, односно $\frac{2}{3}k^2=\frac{k\cdot d_2}{2}$. Од последното равенство се добива поголемата дијагонала на ромбот $d_2=\frac{4}{3}k$. Од правоаголниот триаголник $\triangle ABO$ се добива



$$a^2=(\tfrac{d_1}{2})^2+(\tfrac{d_2}{2})^2, \text{ т.е. } a^2=(\tfrac{k}{2})^2+(\tfrac{4k}{6})^2,$$

од каде се добива дека $a=\frac{5}{6}k$.

а) За волуменот и површината на призмата се добива

$$V=B\cdot H=\tfrac{2}{3}k^2\cdot k=\tfrac{2}{3}k^3 \text{ и } P=2B+4ak=2\cdot\tfrac{2}{3}k^2+4\cdot\tfrac{5}{6}k^2=\tfrac{14}{3}k^2.$$

б) Од условот дека мерните броеви на плоштината и волуменот на призмата се еднакви меѓу себе, се добива $\frac{2}{3}k^3=\frac{14}{3}k^2$, од каде $k=7$.

4. Определи ги сите тројки (x,y,z) од природни броеви така да

$$xyz+xy+yz+zx+x+y+z=243.$$

Решение. Додаваме +1 од двете страни на даденото равенство па добиваме

$$xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1=244,$$

односно

$$xy(z+1)+x(z+1)+y(z+1)+z+1=244,$$

т.е.

$$(z+1)(xy+x+y+1)=244,$$

од каде

$$(x+1)(y+1)(z+1)=244.$$

Сега од $244=2\cdot 2\cdot 61$ добиваме дека $(x+1,y+1,z+1)$ е некоја од тројките $(2,2,61)$, $(2,61,2)$, $(61,2,2)$. Значи бараните тројки се $(1,1,60)$, $(1,60,1)$, $(60,1,1)$.