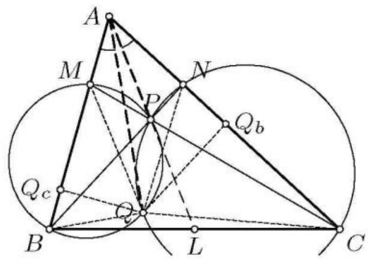
БМО 2009

1. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$3^x - 5^y = z^2 .$$
Решение. Прво да забележиме дека $2 \mid z$, па затоа
$$4 \mid z^2 = 3^x - 5^y \equiv (-1)^x - 1 (\text{mod}\, 4),$$
од каде следува дека x е парен број, т.е. $x = 2k$. Сега равенката го добива видот
$$(3^k - z)(3^k + z) = 5^y ,$$
па затоа $3^k - z = 5^n$ и $3^k + z = 5^{y-n}$, за некој цел број $n \geq 0$. Ако ги собереме последните две равенства добиваме $5^n + 5^{y-n} = 2 \cdot 3^k$ и бидејќи $2 \cdot 3^k$ не е делив со 5, следува дека $n = 0$, односно
$$1 + 5^y = 2 \cdot 3^k .$$
Нека претпоставиме дека $k \geq 2$. Тогаш $9 \mid 5^y + 1$, т.е. $5^y \equiv -1 (\text{mod}\, 9)$. Бидејќи степенот на 5 по модул 9 е еднаков на 6 (Провери!) и $5^3 \equiv -1 (\text{mod}\, 9)$, од последната конгруенција следува дека $y \equiv 3 (\text{mod}\, 6)$. Но, тогаш
$$2 \cdot 3^k = 5^y + 1 \equiv 5^3 + 1 \equiv 0 (\text{mod}\, 7),$$
што не е можно.
Според тоа, $k \leq 1$, од каде следува дека единствено решение на дадената равенка е $(x, y, z) = (2,1,2)$.

2. Во триаголникот ABC точките M и N се соодветно на страните AB и AC и се такви што правата MN е паралелна со страната BC. Нека P е пресекот на правите BN и CM. Кружниците опишани околу $\triangle BMP$ и $\triangle CNP$ се сечат во две различни точки P и Q. Докажи дека $\measuredangle BAQ = \measuredangle CAP$.

Решение. *Прв начин*. Нека правата AP ја сече BC во точка L. Од теоремата на Чева следува
$$\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{MA}} \cdot \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = 1,$$
т.е. L е средина на страната BC. Нека L_b и Q_b (односно L_c и Q_c) се соодветно подножните точки на нормалите повлечени од L и Q на AC (односно на AB).



Бидејќи $\measuredangle QBN = \measuredangle QPC = \measuredangle QNC$ и аналогно $\measuredangle QMB = \measuredangle QCN$, триаголниците BQM и NQC се слични. Од оваа сличност следува

$$\frac{\overline{QQ_b}}{\overline{QQ_c}} = \frac{\overline{NC}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{LL_c}}{\overline{LL_b}},$$

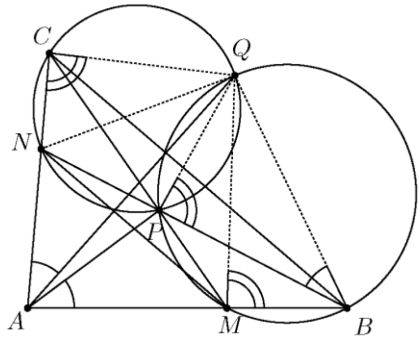
па затоа $\triangle Q_bQQ_c \sim \triangle L_cLL_b$ и притоа важи

$$\measuredangle BAQ = \measuredangle Q_cAQ = \measuredangle Q_cQ_bQ = \measuredangle L_bL_cL = \measuredangle CAL = \measuredangle CAP.$$

Втор начин. Четириаголниците $MBQP$ и $NCQP$ се тетивни, што значи

$$\measuredangle NCQ = \measuredangle BPQ = \measuredangle BMQ,$$

па затоа четириаголникот $AMQC$ е тетивен. Аналогно и четириаголникот $ABQN$ е тетивен. Ќе докажеме дека $\triangle ANQ \sim \Delta APB$. Од сличноста $\triangle PBQ \sim \triangle CAQ$ следува $\frac{\overline{AQ}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{PB}}$, а од $\triangle CNQ \sim \triangle MBP$ следува $\frac{\overline{NQ}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{MB}}$. Според тоа,



$\frac{\overline{AQ}}{\overline{NQ}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CN}} \cdot \frac{\overline{BM}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BM}} \cdot \frac{\overline{BM}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{PB}}$, што заедно со $\measuredangle AQN = \measuredangle ABN$ дава $\triangle ANQ \sim \triangle CAQ$, па затоа $\measuredangle BAQ = \measuredangle CAP$.

Трет начин. Нека Ψ е композиција на симетријата во однос на симетралата на $\measuredangle CAB$ и инверзијата во однос на точката A, со радиус $\sqrt{\overline{AB} \cdot \overline{AN}}$. Бидејќи $MN \parallel BC$, следува дека $\triangle AMN \sim \triangle ABC$, па затоа $\sqrt{\overline{AB} \cdot \overline{AN}} = \sqrt{\overline{AC} \cdot \overline{AM}}$. Нека $X' = \Psi(X)$ за произволна точка X. Инверзијата ја пресликува полуправата која го содржи центарот на инверзијата во самата себе. Претходно споменатата симетрија ги пресликува полуправите AB и AC една во друга. Бидејќи $\overline{AC'} = \frac{\sqrt{\overline{AB} \cdot \overline{AN}}^2}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AM}}{\overline{AC}} = \overline{AM}$, $\overline{AB'} = \frac{\sqrt{\overline{AB} \cdot \overline{AN}}^2}{\overline{AB}} = \overline{AN}$, $\overline{AN'} = \frac{\sqrt{\overline{AB} \cdot \overline{AN}}^2}{\overline{AN}} = \overline{AB}$, $\overline{AM'} = \frac{\sqrt{\overline{AB} \cdot \overline{AN}}^2}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AM}}{\overline{AM}} = \overline{AC}$ и бидејќи точките C' и N' припаѓаат на полуправата AB, а точките B' и M' на полуправата AC, следува дека $\Psi(C) = M$, $\Psi(B) = N$, $\Psi(N) = B$ и $\Psi(M) = C$. Како и во вториот начин ан решавање докажуваме дека четириаголниците $ABDN$ и $AMQC$ се тетивни. Бидејќи A е центар на гореспоменатата инверзија, со пресликувањето Ψ кружниците опишани околу овие четириаголници се пресликуваат во прави и тоа кружницата опишана околу четириаголникот $ABQN$ се пресликува во правата $B'N' \equiv BN$, а кружницата опишана околу четириаголникот $AMQC$ во правата $M'C' \equiv MC$. Пресечните точки на овие кружници се A (центарот на инверзија) и Q, што значи дека точката Q со пресликувањето Ψ се пресликува во пресекот на правите NB и CM, т.е. $\Psi(Q)=P$.

Бидејќи симетријата ги запазува аглите и како при инверзијата правите кои минуваат низ центарот на инверзијата се пресликуваат во самите себе (па не се менува аголот меѓу нив), следува дека

$$\measuredangle BAQ=\measuredangle B'AQ'=\measuredangle NAP=\measuredangle CAP.$$

Четврт начин. Нека конфигурацијата од задачата е сместена во комплексна рамнина, така што на темето A му соодветствува бројот 0. Нека на точките означени со големите букви на латиницата им соодветствуваат афикси означени со истите мали букви на латиницата.

Нека $k\in(0,1)$ е коефициентот на сличност на триаголниците AMN и ABC. Тогаш $a=0, m=kb, n=kc$. Ако точката z припаѓа на MC, тогаш важи $\frac{z-c}{\bar{z}-\bar{c}}=\frac{m-c}{\bar{m}-\bar{c}}=\frac{kb-c}{k\bar{b}-\bar{c}}$, т.е. $z(k\bar{b}-\bar{c})-\bar{z}(kb-c)=k(\bar{b}c-b\bar{c})$. Аналогно, точката z припаѓа на NB ако и само ако важи $z(k\bar{c}-\bar{b})-\bar{z}(kc-b)=k(\bar{c}b-c\bar{b})$. Бидејќи $P=MC\cap BN$ добиваме

$$p=\frac{k(b\bar{c}-\bar{b}c)(kb-c+kc-b)}{(k\bar{c}-\bar{b})(kb-c)-(k\bar{b}-\bar{c})(kc-b)}=\frac{k(k-1)(b\bar{c}-\bar{b}c)(b+c)}{(k^2-1)(b\bar{c}-\bar{b}c)}=\frac{k}{k+1}(b+c).$$

Како и во првиот начин на решавање докуваме дека $\triangle MBQ\sim\triangle NQC$, па затоа $\frac{\overline{BQ}}{\overline{BM}}=\frac{\overline{NQ}}{\overline{NC}}$, од каде добиваме $\frac{q-b}{m-b}=\frac{q-n}{c-n}$, па затоа важи

$$q=\frac{bc-mn}{b+c-m-n}=\frac{bc(1-k^2)}{(b+c)(1-k)}=(k+1)\frac{bc}{b+c}.$$

Бидејќи $\frac{c-a}{p-a}=\frac{c}{p}=\frac{k+1}{k}\cdot\frac{c}{b+c}$ следува

$$U=\frac{c-a}{p-a}:\overline{\left(\frac{c-a}{p-a}\right)}=\frac{c(\bar{b}+\bar{c})}{\bar{c}(b+c)},$$

а бидејќи $\frac{q-a}{b-a}=\frac{q}{b}=(k+1)\cdot\frac{c}{b+c}$ следува

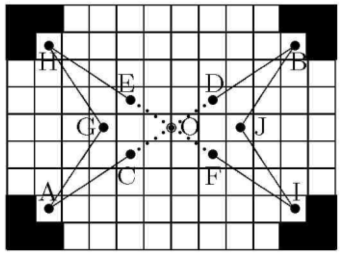
$$V=\frac{q-a}{b-a}:\overline{\left(\frac{q-a}{b-a}\right)}=\frac{c(\bar{b}+\bar{c})}{\bar{c}(b+c)}.$$

Според тоа, $U=V$, а оттука следува дека $\measuredangle BAQ=\measuredangle CAP$.

3. Правоаголник со димензии 9×12 е поделен на единични квадрати. Со црвена боја се обоени центрите на сите единични квадрати, освен на четирите аголни и осумте квадрати кои имаат заедничка страна со некој од аголните квадрати. Дали е можно црвените центри да се означат со $C_1, C_2, ..., C_{96}$, но така да се исполнети следниве услови:

   1) $\overline{C_1C_2}=\overline{C_2C_3}=...=\overline{C_{95}C_{96}}=\overline{C_{96}C_1}=\sqrt{13}$, и

   2) затворената искршена линија $C_1C_2...C_{96}C_1$ е централно симетрична.



Решение. Правоаголникот да го поставиме во координатна рамнина така што центарот на полето во $i-$тата колона и $j-$тата редица има координати (i,j). Точките (i,j) и (i',j') се соседни на патеката

$$\mathbf{C}=C_1C_2...C_{96}C_1$$

ако и само ако $\{|i-i'|,|j-j'|\}=\{2,3\}$.

Центарот на симетрија на патеката $\mathbf{C}$ е точката $O(6\frac{1}{2},5)$. Точките $A(2,2)$ и $B(11,8)$ се симетрични во однос на O и ја делат $\mathbf{C}$ на два дела $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$. Единичните квадрати ќе ги обоиме стандардно како шаховска табла. Тогаш точките A и B се различно обоени, па како секои две соседни точки се различно обоени, секој од деловите $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$ се состои од непарен број отсечки. Затоа овие делови се со различни должини, па затоа не се симетрични еден на друг. Според тоа, секој од деловите $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$ мора да биде централно симетричен.

Деловите $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$ се со непарна должина, па затоа секој од нив треба да содржи отсечка која е централно симетрична во однос на O. Единствени такви отсечки се отсечките кои ги поврзуваат точките $C(5,4)$ и $D(8,6)$, односно $E(5,6)$ и $F(8,4)$, што значи дека отсечките CD и EF се содржани во $\mathbf{C}$. Понатаму, точката A може да се поврзи само со точките C и $G(4,5)$, па затоа отсечките CA и AG се содржани во $\mathbf{C}$. Аналогно, разгледувајќи ги точките B, $H(2,8)$, $I(11,2)$ и $J(9,5)$, добиваме дека патеката $AGHEFIJBDCA$ целосно се содржи во $\mathbf{C}$, што е противречност.

4. Определи ги сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такви што

$$f(f(m)^2+2f(n)^2)=m^2+2n^2, \text{ за секои } m,n\in\mathbb{N}. \qquad (*)$$

Решение. *Прв начин*. Нека n е фиксиран број и да претпоставиме дека $f(m_1)=f(m_2)$. Тогаш од (*) добиваме

$$m_1^2+2n^2=f(f(m_1)^2+2f(n)^2)=f(f(m_2)^2+2f(n)^2)=m_2^2+2n^2,$$

т.е. $m_1=m_2$, што значи дека f е инјекција. Воведуваме смена $g(n)=f(n)^2$ и ја добиваме равенката

$$g(g(m)+2g(n))=(m^2+2n^2)^2. \qquad (1)$$

Од равенството

$$(n+2)^2+2(n-1)^2=(n-2)^2+2(n+1)^2$$

следува дека

$$g(n+2)-2g(n+1)+2g(n-1)-g(n-2)=0,$$

т.е. низата $\{g(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ задоволува линеарна диференцна равенка чие општо решение е

$$g(n)=an^2+bn+c+d(-1)^n. \quad (2)$$

Ако (2) го замениме во (1), тогаш за $m=1$ по средувањето добиваме

$$An^4+Bn^3+Cn^2+Dn+E\pm F=4n^4+4n^2+1, \text{ за секој } n\in\mathbb{N},$$

каде $A=4a^3$ и $B=8a^2b$, па затоа $a=1$ и $b=0$. Сега, од (2) имаме

$$f(n)^2=n^2+c+d(-1)^n.$$

Понатаму, за $n>|c|+|d|$ имаме $n^2-n<f(n)^2<n^2+n$, па затоа мора да важи $f(n)=n$, т.е. $c+d(-1)^n=0$, од каде следува $c=d=0$. Според тоа, $f(n)=n$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

Лесно се проверува дека функцијата $f(n)=n$ е решение на задачата.

Втор начин. Како и во првиот начин докажуваме дека f е инјекција. Затоа важи

$$f(m)^2+2f(n)^2=f(p)^2+2f(q)^2 \quad\Leftrightarrow\quad m^2+2n^2=p^2+2q^2. \quad (3)$$

Ставаме $f(1)=a$. Ако во (*) ставиме $m=n=1$ добиваме $f(3a^2)=3$. За $m=a^2, n=5a^2$ и $p=q=3a^2$ од (3) добиваме

$$f^2(5a^2)+2f^2(a^2)=3f^2(3a^2)=27.$$

Бидејќи решенија на равенката $x^2+2y^2=27$ во множеството природни броеви се $(x,y)=(3,3)$ и $(x,y)=(5,1)$, заклучуваме дека $f(a^2)=1$ и $f(5a^2)=5$. Оттука и од (3) за $m=5a^2, n=2a^2$, $p=a^2$ и $q=4a^2$ добиваме

$$2f^2(4a^2)-2f^2(2a^2)=f^2(5a^2)-f^2(a^2)=24,$$

од каде наоѓаме $f(4a^2)=4$ и $f(2a^2)=2$. Повторно од (3) следува дека за $m=(k+4)a^2, n=(k+1)a^2$, $p=ka^2$ и $q=(k+3)a^2$ важи

$$f^2((k+4)a^2)=2f^2((k+3)a^2)-2f^2((k+1)a^2)+f^2(ka^2).$$

Од последното равенство со индукција следува дека $f(ka^2)=k$. Затоа $f(a^3)=a=f(1)$, и како f е инјекција добиваме $a^3=1$, т.е. $a=1$. Според тоа, $f(k)=k$, за секој $k\in\mathbb{N}$. Лесно се проверува дека оваа функција го задоволува условот на задачата.