РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА,ОДРЖАН ВО 1955 ГОД.

1. Дадена е равенката:

$$x^2+px+q=0, \qquad (1)$$

во која што p и q претставуваат два реални броја.

а) Да се докаже:ако корените на равенката (1) се разликуваат за 1,тогаш меѓу p и q постои врска:

$$p^2=4q+1. \qquad (2)$$

б) При претпоставка дека е исполнет условот (2) да се испита при кои вредности за p : 1) двата корена ќе бидат позитивни; 2) двата корена ќе бидат негативни; 3) корените ќе бидат со спротивни знаци.

в) Да се докаже:ако меѓу коефициентите на равенката (1) постои врската (2),тогаш равенката:

$$x^2+px+q+(2x+p)(x+a)=0 \qquad (3)$$

има реални корени за сите вредности на a .

2. Во еден рамностран триаголник со страна a се впишани три круга со еднакви радиуси,така што секој круг се допира до две страни на триаголникот и до другите два круга.

а) Пресметај го радиусот на овие кругови и плоштината, заградена со круговите.

б) Конструирај го триаголникот со впишаните кругови,земајќи за a некоја произволна отсечка.

3. Даден е еден полукруг со дијаметар $AB=2r$,и една точка M на периферијата од тој полукруг.Точката M се проектира на дијаметарот AB во точката H .Освен тоа нека е $AH=x$.

Во точката M поставена е нормалата на рамнината на кругот и на неа е избрана една точка S така,да биде $MS=MH$. Потоа се разгледува тространата пирамида (тетраедар) $SMAB$.

а) Да се изразат со помошта на r и x должините на сите рабови на тетраедарот и да се покаже дека наклонетиот агол на страната ASB спрема основата не се менува,ако се менува x.

б) Да се докаже дека збирот на квадратите од должините на спротивните рабови на тетраедарот, земајќи ги како такви AB и SM, SB и AM, SA и BM, претставува секогаш една и иста вредност y, зависна од x.

в) Земајќи дека е $r=1$, да се нацрта графикот на функцијата y, водејќи сметка за границите во кои што може да варира x.

г) Да се определи положбата на центарот и големината на радиусот на топката, опишана околу тетраедарот $SMAB$.

РЕШЕНИЈА

1.а) Од равенките

$$x_1+x_2=-p,\quad x_1.x_2=q,\quad |x_1-x_2|=1$$

следува:

$$x_1^2+2x_1x_2+x_2^2=p^2,\quad x_1x_2=q,\quad x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=1\ ;$$

$$x_1^2+x_2^2=p^2-2q,\quad x_1^2+x_2^2=1+2q,$$

$$p^2-2q=1+2q,$$

$$p^2=4q+1.$$

б) Корените се позитивни ако е $x_1x_2=q>0$ и $x_1+x_2=-p>0$ (т.е. $p<0$).Од врската (2) за $q>0$ следува $p^2>1$,т.е. $|p|>1$. Значи,корените ќе бидат позитивни кога е $p<-1$.

Корените се негативни кога $q>0$, $p>0$.Од врската(2), во овој случај,следува дека е $p^2>1$.Според тоа корените се негативни кога е $p>1$.

Корените се со спротивни знаци кога е $q<0$,а тогаш од врската (2) следува дека е $p^2<1$.Според тоа корените се со спротивни знаци кога е $-1<p<1$.

в) Равенката (3) ќе има реални корени, ако е нејзината дискриминанта поголема или еднаква на нула за сите вредности на a.

Ако равенката ја средиме по степените на x се добива:

$$3x^2+2(a+p)x+ap+q=0.$$

Дискриминантата на оваа равенка е

$$D=4(a+p)^2-12(ap+q).$$

Од (2) следува:

$$q=\frac{p^2-1}{4}.$$

Ако во дискриминантата D го замениме q со оваа вредност,се добива:

$$D=4a^2-4ap+p^2+3=(2a-p)^2+3.$$

Добиениот израз е позитивен за сите вредности на a. Според тоа,ако е задоволен условот (2) за сите вредности на a, равенката (3) ќе има реални корени.

2.а) Бидејќи секој од круговите допира по две од страните на триаголникот,центрите на бараните кругови се наоѓаат на симетралите на аглите од триаголникот ABC , а допирните точки на круговите се наоѓаат исто така на симетралите на аглите од триаголникот.

Бараниот радиус да го означиме со r.

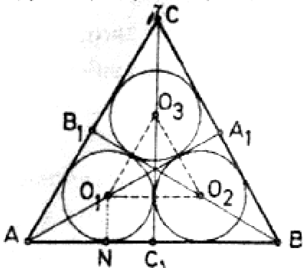
Во триаголникот ANO_1 (сл.1) $\sphericalangle NAO_1=30°$ и $\overline{AN}=r\operatorname{ctg}30°=r\sqrt{3}$, $\overline{AO_1}=\sqrt{r^2+3r^2}=2r$. Од $\overline{AN}+\overline{NC_1}=\frac{a}{2}$ следува $r\sqrt{3}+r=\frac{a}{2}$, од каде се наоѓа дека е

$$r=\frac{1}{4}a(\sqrt{3}-1).$$

Плоштината на заградениот дел од круговите е разлика од плоштината на $\Delta\, O_1O_2O_3$ и трите исечоци од круговите(O_1), (O_2) и (O_3),со централни агли од 60°.

$$P=\frac{(2r)^2\sqrt{3}}{4}-\frac{3\pi r^2\ 60}{360}=\frac{r^2}{2}(2\sqrt{3}-\pi)=\frac{a^2}{16}(2-\sqrt{3})(2\sqrt{3}-\pi).$$

б) Ќе конструираме рамностран триаголник ABC со страна a и симетралите на аглите во тој триаголник. Со тоа триаголникот се поделува на три складни делтоиди AC_1OB_1, BA_1OC_1 и CA_1OB_1. По ова задачата се сведува на впишување кругови во тие делтоиди. Центри на впишаните кругови се пресеците на симетралите на внатрешните агли во делтоидите,а радиусот е нормалното растојание на центарот од страните на делтоидот.



Сл.1

3.а) Должината на рабовите на тетраедарот SMAB се:

$\overline{AB}=2r$, $\overline{AM}=\sqrt{2rx}$, $\overline{BM}=\sqrt{2r(2r-x)}$, $\overline{MS}=\overline{MH}=\sqrt{x(2r-x)}$,

$\overline{AS}=\sqrt{AM^2+MS^2}=\sqrt{4rx-x^2}$ и $\overline{BS}=\sqrt{BM^2+MS^2}=\sqrt{4r^2-x^2}$.

Наклонетиот агол на страната ASB спрема основата е $\measuredangle SHM=\phi$ (сл.2).

Од $tg\phi=\frac{MS}{MH}=1$ следува дека е $\phi=45^\circ$, што значи дека големината на ϕ не зависи од x.

б)

$$\overline{AB}^2+\overline{SM}^2=4r^2+(2r-x)x,$$

$$\overline{BS}^2+\overline{AM}^2=4r^2-x^2+2rx=4r^2+(2r-x)x,$$

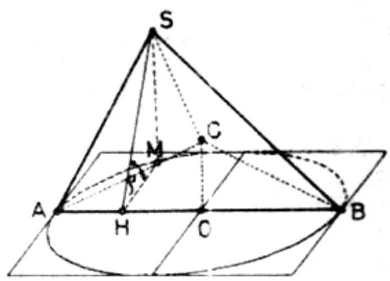
$$\overline{AS}^2+\overline{BM}^2=4rx-x^2+2r(2r-x)=4r^2+(2r-x)x.$$

Значи:

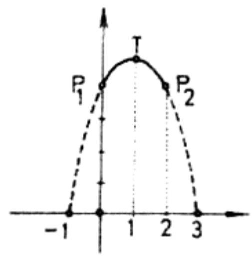
$$y=4r^2+(2r-x)x.$$

в) За $r=1$, $y=4+(2-x)x=-(x-1)^2+5$.

Графикот на оваа функција е парабола со теме $T(1,5)$, а бидејќи е $0<x<2$, ќе се земе предвид само делот на графикот над интервалот $(0,2)$ (сл.3) на x-оската.



Сл.2



Сл.3

г) Центарот C на топката, опишана околу тетраедарот SAMB, се наоѓа во точката која што е еднакво оддалечена од точките A, B, M и S. Геометриското место на сите точки, еднакво оддалечени од точките M и S, е симетралната рамнина на отсечката MS, а геометриското место на сите точки, подеднакво оддалечени од точките A, B и M е нормалата, подигната во центарот O на дадениот полукруг. Според тоа е:

$$OC=\frac{MS}{2}$$

$$R=\sqrt{\overline{OC}^2+\overline{OB}^2}=\sqrt{(\overline{MS}/2)^2+(\overline{AB}/2)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\overline{MS}^2+\overline{AB}^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4r^2+(2r-x)x}.$$

Задачите се превземени од книгата
Десет години натпревари по математика, подготвена од П. Димиќ и Е. Бубески