Малчески Самоил, Скопје
Малчески Ристо, Скопје

СТЕПЕНОТ НА ТОЧКА ВО ОЛИМПИСКИ ЗАДАЧИ

Во оваа статија ќе се осврнеме на примената на степенот на точка во однос на кружница во решавање на неколку олимписки задачи. Притоа ќе сметаме дека читателот е запознаен со поимите степен на точка, радикална оска и радикален центар и невните својства, па затоа истите нема детално да ги презентираме. Овде ќе напомниме дека читателите кои ги немаат потребните знаења за наведените поими потребно е да консултираат соодветна литература. За таа цел им препорачуваме да ги консултираат книгите од наведената литература.

Да се потсетима на дефиницијата на степенот на точка во однос на кружница, радикалната оска и радикалниот центар, како и на нивните својства кои ќе ги презентираме без доказ.

Нека во рамнината се дадени точка A кружница $k(O,r)$. Ако l е произвона права низ A која ја сече k во точките B и C, тогаш производот $\overline{AB}\cdot\overline{AC}$ не зависи од изборот на l. Притоа важи $\mathrm{P}_{A,k}=\overline{AB}\cdot\overline{AC}=\overline{OA}^2-r^2$. Производот $\mathrm{P}_{A,k}$ го нарекуваме степен на точката A воодност на кружницата k. Притоа, за отсечките AB и AC сметаме дека се *ориентирани*, т.е. производот $\overline{AB}\cdot\overline{AC}$ е позитивен ако $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ се истонасочени, а во спротивно е негативен. Специјално, степенот на точката P во однос на кружницата k е позитивен ако точката P е надвор од кружницата, негативен ако P е внатре во кружницата и е еднаков на нула ако P лежи на кружницата.

Теорема 1. Ако AB и CD се две прави кои минуваат низ точката P, каде A, B,C,D се точки на кружницата k, тогаш $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$ (отсечките се ориентирани).

Теорема 2. Ако правите AB и CD се сечат во точката P и важи $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$, каде отсечките се ориентирани, тогаш точките A,B,C,D се конциклични (лежат на иста кружница).

Забелешка 1. Геометриското место на точките со степен p во однос на кружницата $k(O,r)$ е кружницата $k'(O,\sqrt{r^2+p})$, при што мора да важи $p\ge -r^2$.

Теорема 3. Сите точки со еднаков степен во однос на две неконцентрични кружници $k_1(O_1,r_1)$ и $k_2(O_2,r_2)$ припаѓаат на една иста права, која е нормална на правата O_1O_2.

Дефиниција 1. *Радикална оска* на две неконцентрични кружници $k_1(O_1,r_1)$ и $k_2(O_2,r_2)$ е правата за која сите нејзини точки имаат еднаков степен во однос на двете кружници.

Јасно, ако кружниците k_1 и k_2 се сечат (се допираат), тогаш нивната радикална оска е определена со заедничката тетива (заедничката тангента во допирната точка).

Последица 1. Средините на четирите заеднички тангенти на две дисјунтни кружници такви што едната не припаѓа на внатрешноста на другата припаѓаат на радикалната оска на тие кружници.

Теорема 4. Нека k_1, k_2, k_3 се по парови неконцентрични кружници. Радикалните оски на кружниците k_1 и k_2, k_2 и k_3, k_3 и k_1 или се сечат во една точка, или се паралелни или се совпаѓаат.

Дефиниција 2. Ако радикалните оски на три кружници се сечат во една точка, тогаш таа точка ја нарекуваме *радикален центар* на тие кружници.

Јасно, ако три кружници се сечат по парови, тогаш нивните три заеднички тетиви се сечат во иста точка (се конкурентни).

Дефиниција 3. За две кружници ќе велиме дека ортогонално се сечат ако тангентите во нивните пресечни точки се заемно нормални.

Теорема 5. Радикалната оска на две кружници што немаат заеднички точки, односно делот на радикалната оска на две кружници што се сечат, а е надвор на кружниците, е геометриското место на центрите на кружниците коишто ортогонално ги сечат дадените кружници.

Последица 2. Ако центрите на три кружници кои немаат заедничка внатрешна точка не припаѓаат на иста права, тогаш постои точно една кружница која е ортогонална на сите три кружници и нејзиниот центар е радикалниот центар на трите кружници.

1. Даден е триаголник ABC. Точките A_1, A_2 на страната BC, точките B_1, B_2 на страната CA и точките C_1, C_2 на страната AB се такви што четирите точките (A_1, A_2, B_1, B_2), четирите точки (B_1, B_2, C_1, C_2) и четирите точки (C_1, C_2, A_1, A_2) се конциклични. Докажи дека сите шест точки $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ се концикллични.

   Решение. Кружниците (B_1, B_2, C_1, C_2), (C_1, C_2, A_1, A_2), (A_1, A_2, B_1, B_2) да ги означиме со k_A, k_B, k_C, соодветно. Ако овие кружници не се совпаѓаат, тогаш радикалните оски на паровите кружници (k_A, k_B), (k_B, k_C) и (k_C, k_A) се правите C_1C_2, A_1A_2 и B_1B_2, соодветно. Последното противречи на теорема 4, бидејќи страните на триаголникот ниту се сечат во една очка, ниту се паралелни, ниту се совпаѓаат. Значи, кружниците k_A, k_B, k_C се совпаѓаат, што и требаше да се докаже.

2. Кружницата ω се допира до краците на $\measuredangle BAC$ во точките B и C. Правата l ги сече отсечките AB и AC соодветно во точкие K и L. Кружницата ω ја

сече l во точките P и Q. Точките S и T припаѓаат на отсечката BC и се такви што $KS \parallel AC$ и $LT \parallel AB$. Докажи дека точките P,Q,S и T се концициклични.

Решение. Ако $l \parallel BC$, тврдењето е очигледно заради симетријата во однос на симетралата на BC. Нека правите l и BC се сечат во точката X. Од паралелноста следува $\frac{\overline{XB}}{\overline{XT}} = \frac{\overline{XK}}{\overline{XL}} = \frac{\overline{XS}}{\overline{XC}}$, па затоа $\overline{XB} \cdot \overline{XC} = \overline{XT} \cdot \overline{XS}$. Бидејќи B, C, P и Q лежат на ω, имаме $\overline{XB} \cdot \overline{XC} = \overline{XP} \cdot \overline{XQ}$. Според тоа, $\overline{XP} \cdot \overline{XQ} = \overline{XT} \cdot \overline{XS}$, што значи дека точките P, Q, S и T се концициклични.

3. Припишаната кружница кон страната AB на $\triangle ABC$ се допира до AB во точката P и до правите BC и CA соодветно во точките Q и R. Докажи дека, ако средината на отсечката PQ припаѓа на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, тогаш и средината на отсечката PR припаѓа на таа кружница.

Решение. Нека I е центарот на разгледуваната припишана кружница, а T и S се соодветно средините на PQ и PR. Бидејќи $\measuredangle API = \measuredangle ATP = 90^\circ$, од правоаголниот $\triangle API$ следува $\overline{IA} \cdot \overline{IT} = \overline{IP}^2$. Аналогно, $\overline{IB} \cdot \overline{IS} = \overline{IP}^2$. Според тоа, $\overline{IA} \cdot \overline{IT} = \overline{IB} \cdot \overline{IS}$, па затоа точките A, B, T и S лежат на една кружнца, што значи дека T лежи на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ ако и само ако S лежи на истата таа кружница.

4. Во разностран триаголник ABC, впишаната кружница Γ со центар I ги допира страните BC, CA, AB во точките A_1, B_1, C_1, соодветно. Точката M е средина на отсечката B_1C_1. Правата AA_1 по втор пат ја сече Γ во точката A_2, а A_1M и A_2M по втор пат ја сечат Γ во точките P и Q. Докажи дека точките A, P и Q се колинеарни.

Решение. Од $\overline{AM} \cdot \overline{AI} = \overline{AB_1}^2 = \overline{AA_1} \cdot \overline{AA_2}$ следува дека точките M, I, A_1, A_2 се концициклични, па затоа $\measuredangle QMI = \measuredangle IA_1A_2 = \measuredangle IA_2A_1 = \measuredangle IMA_1$ (направи цртеж). Оттука следува дека правите A_2Q и PA_1 се симетрични во однос на AI, па затоа и правата PQ е симетрична на правата A_2A_1 и минува низ точката A.

5. Во триаголникот ABC аголот при темето A е најмал. Точките D и E припаѓаат соодветно на страните AB и AC и се такви што $\measuredangle DCB = \measuredangle EBC = \measuredangle BAC$. Докажи дека средините на отсечките AB, AC, BE и CD се концициклични.

Решение. Со P, Q, R, S, T да ги означиме средините на отсечките $BC, CA,$

AB, BE, CD, соодветно (направи цртеж). Точките S и T соодветно се на отсечките PR и PQ и важи $\triangle BSP \sim \triangle BEC \sim \triangle ABC$ и слично $\triangle CPT \sim \triangle ABC$. Според тоа, $\frac{\overline{PS}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ и $\frac{\overline{PT}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$. Оттука следува $\frac{\overline{PS}}{\overline{PT}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}}$, односно $\overline{PS} \cdot \overline{PR} = \overline{PT} \cdot \overline{PQ}$, од каде следува тврдењето на задачата.

6. Дадена кружница со центар во O одвнатре ја допираат две кружници во точките S и T. Нека овие кружници се сечат во точките M и N, при што N е поблиску до правата ST. Докажи дека правите OM и MN се заемно нормални ако и само ако точките S, N и T се колинеарни.

   Решение. Нека тангентите во точките S и T се сечат во точката K (ако овие тангенти се паралелни, тогаш точките S, O, T се колинеарни па така M и N се еднакво оддалечени од ST, што противречи на условот на задачата). Тогаш $\measuredangle OSK = 90^\circ = \measuredangle OTK$, па затоа точките O, S, K, T припаѓаат на кружница со дијаметар OK, направи цртеж.

   Исто така важи $\overline{KS}^2 = \overline{KM} \cdot \overline{KN} = \overline{KT}^2$, па затоа K припаѓа на радикалната оска MN на двете внатрешни кружници. Тоа значи дека точките M, N, K се колинеарни.
   Ако S, N и T се колинеарни, тогаш

$$\measuredangle SMT = \measuredangle SMN + \measuredangle TMN = \measuredangle NSK + \measuredangle KTN = 180^\circ - \measuredangle SKT,$$

   па затоа точките M, S, K, T, O се конциклични. Тогаш

$$\measuredangle OMN = \measuredangle OMK = \measuredangle OSK = 90^\circ.$$

   Обратно, ако $OM \perp MN$, тогаш $\measuredangle OMK = \measuredangle OSK = 90^\circ$, па затоа точките M, S, K, T, O се конциклични, па затоа

$$\measuredangle SKT = 180^\circ - \measuredangle SMT = 180^\circ - \measuredangle SMN - \measuredangle TMN = 180^\circ - \measuredangle NSK - \measuredangle KTN.$$

   Сега,

$$\measuredangle TNS = 360^\circ - \measuredangle NSK - \measuredangle SKT - \measuredangle KTN = 180^\circ,$$

   па затоа точките S, N и T се колинеарни.

7. Нека M и N се соодветно средините на страните AB и AC на $\triangle ABC$, а D е подножјето на висината повлечена од темето A. Опишаните кружници околу $\triangle BDN$ и $\triangle CDM$ по втор пат се сечат во точката P. Докажи дека правата PD ја преполовува отсечката MN.

   Решение. Правата PD е радикална оска на кружниците $k_1(BDN)$ и $k_2(CDM)$, па доволно е да докажеме дека средината K на отсечката MN има еднаков степен во однос на двете кружници.

   Нека кружниците k_1 и k_2 по втор пат ја сечат правата MN во точките P и Q, соодветно (направи цртеж). Тогаш $PBDN$ и $QCDM$ се тетивни трапези, па затоа $\overline{PB}=\overline{DN}=\overline{CN}$ и $\overline{QC}=\overline{DM}=\overline{BM}$, што значи дека четириаголниците $PBCN$ и $QCBM$ се паралелограми и $\overline{PN}=\overline{MQ}=\overline{BC}$, т.е. $\overline{PK}=\overline{KQ}$. Сега степенот на точката k во однос на двете кружници е еднаков на

$$\overline{KP}\cdot\overline{KN}=\overline{KQ}\cdot\overline{KM}.$$

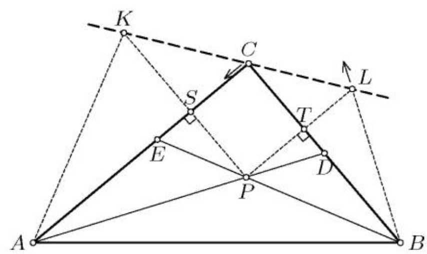
8. Нека P е точка во внатрешноста на триаголникот ABC таква што $\measuredangle APB\neq 90^\circ$. Правите AP и BP ги сечат страните BC и AC соодветно во точките D и E. Нека K и L се соодветно ортоцентрите на триаголниците APE и BPD. Докажи дека темето C припаѓа на правата KL ако и само ако $\measuredangle ACB=90^\circ$.

Решение. *Прв начин*. Нека $\measuredangle ACB=90^\circ$. Бидејќи

$$\measuredangle AKP=90^\circ-\measuredangle KPE=\measuredangle PEC=\measuredangle BPL$$

и аналогно $\measuredangle APK=\measuredangle BLP$, добиваме $\triangle AKP\sim\triangle BPL$. Според тоа, на подножјето S на висината од A во $\triangle AKP$ соодветствува подножјето T на висината од B во $\triangle BPL$, па затоа

$$\frac{\overline{KS}}{\overline{CT}}=\frac{\overline{KS}}{\overline{SP}}=\frac{\overline{PT}}{\overline{TL}}=\frac{\overline{SC}}{\overline{TL}},$$



што значи дека $\triangle KSC\sim\triangle CTL$. Оттука следува дека точките K,C и L се колинеарни.

Нека сега претпоставиме дека $\measuredangle ACB>90^\circ$ и нека C' е подножјето на нормалата од точката B на правата AC. Ако D' е пресекот на правите AP и BC', а L' е ортоцентарот на триаголникот BPD', од претходно докажаното следува дека точките K,C' и L' се колинеарни. Меѓутоа, бидејќи точките C и L соодветно припаѓаат на отсечката AC' и продолжението на отсечката BL' преку L', тие не може да се колинеарни со точката K. Слично се разгледува случајот кога $\measuredangle ACB<90^\circ$.

Втор начин. Нека R,S и T се подножјата на нормалите од P на AK,AC и BC, соодветно. Точката R припаѓа на кружницата γ_1 над дијаметар AB, а точките S и T припаѓаат на кружницата γ_2 над дијаметар CP. Од

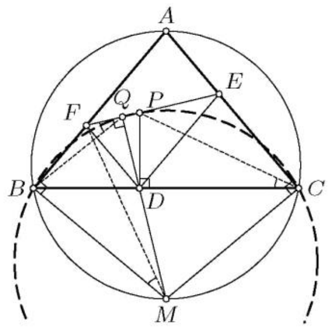
$$\overline{KR}\cdot\overline{KA}=\overline{KS}\cdot\overline{KP},$$

следува дека точката K има еднаков степен во однос на γ_1 и γ_2, па затоа припаѓа на нивната радикална оска l. Аналогно, ортоцентрите H_1,H_2 и L на триаголниците ACD,BCE и BDP припаѓаат на радикалната оска l. Бидејќи $CH_1\perp AD$ и $CH_2\perp BE$, точката C припаѓа на правата l ако и само ако

$H_1 \equiv C$ или $H_2 \equiv C$, т.е. ако и само ако $\measuredangle ACB = 90^\circ$.

9. Триаголникот ABC во кој $\overline{AB} = \overline{AC}$ е впишан во кружница со дијаметар AM. Точките D, E, F припаѓаат соодветно на страните BC, AC, AB и се такви што четириаголникот $AEDF$ е паралелограм. Симетралата на $\measuredangle EDF$ и правата MD ја сечат правата EF во точките P и Q, соодветно. Докажи дека точките B, C, P и Q се конциклични.

Решение. *Прв начин*. Нека P е меѓу точките E и Q. Од $\triangle FBD \sim \triangle EDC \sim \triangle ABC$ следува $\overline{CE} = \overline{DE}$ и $\overline{BF} = \overline{DF}$. Бидејќи



$$\overline{ME}^2 - \overline{MF}^2 = (\overline{MC}^2 + \overline{CE}^2) - (\overline{MB}^2 + \overline{BF}^2)$$
$$= \overline{CE}^2 - \overline{BF}^2 = \overline{DE}^2 - \overline{DF}^2,$$

важи $MD \perp EF$, т.е. $MD \perp EP$. Исто така $CD \perp DP$ и $CM \perp AC \parallel DF$, па затоа триаголниците CMD и DFP се слични. Оттука следува

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{DP}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{BF}},$$

па затоа правоаголните гтриаголници CDP и MBF се слични. Значи, $\measuredangle BCP = \measuredangle BMF$.

Од друга страна, бидејќи $\measuredangle MQF = 90^\circ = \measuredangle MDF$ четириаголникот $BMQF$ е тетивен, па затоа $\measuredangle BQF = \measuredangle BMF = \measuredangle BCP$, т.е. $\measuredangle BQP = 180^\circ - \measuredangle BCP$, што значи дека четириаголникот $BCPQ$ е тетивен.

Втор начин. Ако $EF \parallel BC$, тогаш $P \equiv Q$ и тврдењето е тривијално. Сега нека правите EF и BC се сечат во точката K. Како и при првиот начин на решавање, имаме

$$\overline{ME}^2 - \overline{MF}^2 = (\overline{MC}^2 + \overline{CE}^2) - (\overline{MB}^2 + \overline{BF}^2) = \overline{CE}^2 - \overline{BF}^2 = \overline{DE}^2 - \overline{DF}^2,$$

па затоа $MD \perp EF$, т.е. $\measuredangle KQD = \measuredangle KDP = 90^\circ$. Оттука $\triangle KQD \sim \triangle KDP$ и

$$\overline{KP} \cdot \overline{KQ} = \overline{KD}^2.$$

Од друга страна, според Талесовата теорема имаме

$$\frac{\overline{KB}}{\overline{KD}} = \frac{\overline{KF}}{\overline{KE}} = \frac{\overline{KD}}{\overline{KC}},$$

па затоа

$$\overline{KB} \cdot \overline{KC} = \overline{KD}^2.$$

Според тоа,

$$\overline{KP} \cdot \overline{KQ} = \overline{KB} \cdot \overline{KC},$$

што значи дека четириаголникот $BCPQ$ е тетивен.

10. Кружниците ω_1 и ω_2 се сечат во точките X и Y. Права l_1 која минува низ центарот на ω_1 ја сече ω_2 во точките P и Q, а права l_2 која минува низ центарот на ω_2 ја сече ω_1 во точките R и S. Докажи дека, ако точките P, Q, R и S лежат на една кружница, тогаш центарот на таа кружница лежи на правата XY.

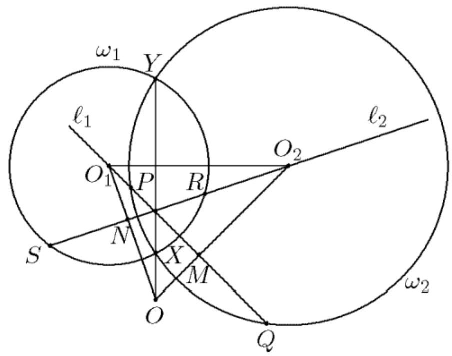
Решение. Со ω да ја означиме кружницата која минува низ точките P, Q, R и S и нека O е центарот на ω. Правата XY е радикална оска на ω_1 и ω_2. Доволно е да докажеме дека O има еднакви степени спрема двете кружници, што значи

$$\overline{OO_1}^2 - \overline{SO_1}^2 = \overline{OO_2}^2 - \overline{QO_2}^2,$$

т.е.

$$\overline{OO_1}^2 + \overline{QO_2}^2 = \overline{OO_2}^2 + \overline{SO_1}^2,$$

каде O_1 и O_2 се центрите на ω_1 и ω_2, соодветно.



Нека M и N се соодветно пресечните точки на O_2O, l_1 и O_1O, l_2. Бидејќи кружниците ω и ω_2 се сечат во точките P и Q важи $PQ \perp OO_2$ (или $l_1 \perp O_2O$. Според тоа,

$$\begin{aligned}\overline{OO_1}^2 - \overline{OQ}^2 &= (\overline{OM}^2 + \overline{MO_1}^2) - (\overline{OM}^2 + \overline{MQ}^2) \\ &= (\overline{O_2M}^2 + \overline{MO_1}^2) - (\overline{O_2M}^2 + \overline{MQ}^2) \\ &= \overline{O_2O_1}^2 - \overline{O_2Q}^2\end{aligned}$$

па затоа

$$\overline{O_2O_1}^2 + \overline{OQ}^2 = \overline{OO_1}^2 + \overline{O_2Q}^2.$$

На ист начин го добиваме равенството

$$\overline{O_2O_1}^2 + \overline{OS}^2 = \overline{OO_2}^2 + \overline{O_1S}^2.$$

Бидејќи, $\overline{OS} = \overline{OQ}$, од последните две равенства следува бараното равенство

$$\overline{OO_1}^2 + \overline{QO_2}^2 = \overline{OO_2}^2 + \overline{SO_1}^2.$$

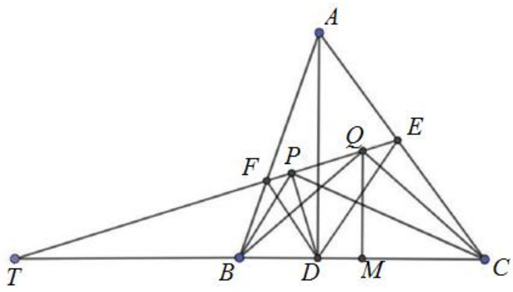
11. Во остроаголен триаголник ABC ($\overline{AB} < \overline{AC}$) нека точките D, E, F се подножјата на висините повлечени од темињата A, B, C, соодветно. Нека P и Q се точки на правата EF такви што $DP \perp EF$ и $\overline{BQ} = \overline{CQ}$. Докажи дека

$\measuredangle ADP = \measuredangle PBQ$

Решение. Нека M е средина на страната BC, а T е пресекот на правите BC и EF. Четириаголникот $BCEF$ е тетивен, бидејќи

$$\measuredangle BFC = \measuredangle BEC = 90^\circ .$$

Исто така и четриаголникот $FDME$ е тетивен, бидејќи овие точки припаѓаат на Ојлеровата кружница на триаголникот ABC. Сега, од $\measuredangle QMD = \measuredangle DPQ = 90^\circ$ следува дека и четириаголникот $PDMQ$ е тетивен. Од степенот на точката T во однос на овие кружници важи



$$\overline{TB}\cdot\overline{TC} = \overline{TF}\cdot\overline{TE} = \overline{TD}\cdot\overline{TM} = \overline{TP}\cdot\overline{TQ} ,$$

од каде што следува дека четириаголникот $BCQP$ е тетивен. Забележуваме дека

$$\measuredangle PBQ + \measuredangle QBC = \measuredangle PBC = \measuredangle PTB + \measuredangle TPB ,$$

од каде заради

$$\measuredangle QBC = \measuredangle QCB = 180^\circ - \measuredangle BPQ = \measuredangle TPB ,$$

важи $\measuredangle PBQ = \measuredangle PTD$. Конечно,

$$\measuredangle PBQ = \measuredangle PTD = 90^\circ - \measuredangle TDP = \measuredangle PBQ = \measuredangle PDA .$$

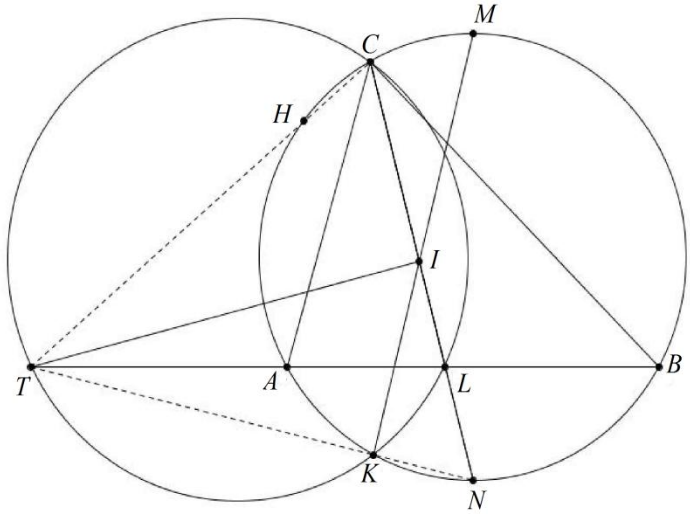
12. Нека k е опишаната кружница околу остроаголниот $\triangle ABC$ ($\overline{AC} < \overline{BC}$), CL е симетралата на $\measuredangle ACB$ ($L \in AB$), M е средината на лакот AB на кружницата k во кој се наоѓа и точката C, а I е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Кружницата k по втор пат ги сече правата MI во точката K и кружницата со дијаметар CI во точката H. Ако опишаната кружница околу $\triangle CLK$ по втор пат ја сече правата AB во точката T, докажи дека точките T, H, C се колинеарни.

Решение. Нека симетралата на $\measuredangle ACB$ ја сече k во точката N, Тогаш

$$\measuredangle NKC + \measuredangle CKT = \measuredangle NAC + \measuredangle CLT = \measuredangle NAC + \measuredangle ABC + \measuredangle LCB$$
$$= \measuredangle NAC + \measuredangle ANC + \measuredangle ACN = 180^\circ ,$$

па затоа точките T, K, N се колинеарни. Понатаму, $\overline{NA} = \overline{NB} = \overline{NI}$ (Докажи!). Сега, од $\measuredangle NAB = \measuredangle NCB = \measuredangle NCA$ следува дека триаголниците NAL и NAC се слични, па затоа $\overline{NA}^2 = \overline{NL}\cdot\overline{NC}$. Од степенот на точката N во однос на кружницата опишана околу четириаголникот $TKLC$ следува $\overline{NL}\cdot\overline{NC} = \overline{NK}\cdot\overline{NT}$.

Значи, $\overline{NI}^2 = \overline{NA}^2 = \overline{NL} \cdot \overline{NC} = \overline{NK} \cdot \overline{NT}$, па затоа триаголниците NKI и NTI се слични, од што следува $\measuredangle TIN = \measuredangle IKN = 90^\circ$ (очигледно MN е дијаметра на кружницата k).



Сега, кружницата k_1 опишана околу триаголникот ABI (чиј центар е N) и кружницата k_2 со дијаметар CI се допираат во точката I (центрите и точката I лежат на иста права). Затоа TI е заедничка тангента на овие кружници. Понатаму, правите AB, TI, CH соодветно се радикални оски на паровите кружници k и k_1, k_1 и k_2, k_2 и k, па затоа тие се сечат во една точка, од каде што следува дека точките T, H, C се колинеарни.

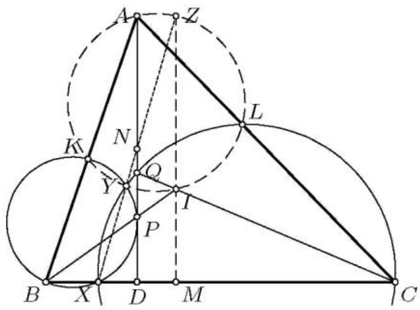
13. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$ со $\measuredangle ACB > 90^\circ$. Впишаната кружница со центар I ги допира страните AB, BC, CA во точките D, E, F, соодветно. Правите AI и BI ја сечат отсечката EF во точките M и N, соодветно. Ако G е средината на AB, докажи дека точките M, N, D и G припаѓаат на иста кружница.

Решение. Да забележиме дека M и N се надворешни за $\triangle ABC$. При стандардните ознаки за триаголник имаме $\measuredangle MEB = \measuredangle CEF = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} = \measuredangle MIB$ и затоа четириаголникот $IBME$ е тетивен и $\measuredangle AMB = 90^\circ$. Аналогно четириаголникот $AIFN$ е тетивен и $\measuredangle ANB = 90^\circ$. Според тоа, четириаголникот $ABMN$ е тетивен со центар G.

Сега од радикалните оски на кружниците $MBDI, NADI$ и $ABMN$ добиваме дека пресечната точка X на AN и BM лежи на DI. Значи за $\triangle ABX$ точките M, N, D се подножја на неговите висини. Значи, опишаната кружница околу $\triangle MND$ е Ојлеровата кружница за $\triangle ABX$, која минува низ средината на AB.

Според тоа, точките M, N, D и G лежат на Ојлеровата кружница за $\triangle ABX$, со што задачата е решена.

14. Вписаната кружница во триаголникот ABC ги допира страните AB и AC во точките K и L, соодветно. Симетралите на аглите во темињата B и C ја сечат висината $AD\,(D \in BC)$ во точките P и Q, соодветно. Докажи дека должините на тангентите повлечени од средината на висината AD на кружниците BKP и CLQ се еднакви.



Решение. Со I да го означиме центарот на впишаната кружница, M нејзината допирна точка со страната BC, а X точката симетрична на точката M во однос на D. Триаголниците BKP и BMP се складни, па затоа во ориентирани агли важи

$$\measuredangle BKP = \measuredangle PNB = 180^\circ - \measuredangle PXB,$$

што значи дека точката X припаѓа на кружницата BKP. Слично, X припаѓа на кружницата CLQ.

Нека Y е втората пресечна точка на кружниците BKP и CLQ. Од теоремата на Микел следува дека таа припаѓа и на кружницата AKL со дијаметар AI. Нека кружницата AKL по втор пат ја сече правата XY во точката Z. Бидејќи $\measuredangle ZAK = \measuredangle KYX = 180^\circ - \measuredangle B$, важи $AZ \parallel BC$. Исто така $\measuredangle AZI = 90^\circ$, па затоа $ZI \perp BC$. Според тоа точките Z, I, M се колинеарни, т.е. четириаголникот $AZMD$ е правоаголник. Бидејќи $\overline{XD} = \overline{DM}$, добиваме дека четириаголникот $AZXD$ е паралелограм, па правата XYZ ја сече висината AD во нејзината средина N. Според тоа, N припаѓа на радикалната оска на кружниците BKP и CLQ, од што следува тврдењето на задачата.

Литература

1. Lopandić, D.: Geometrija, https://www.scribd.com/document/44667591/LopandicGeometrija
2. Mitrović, M., Ognjanović, S., Veljković, M., Petković, Lj., Lazareveć, N.: Geometrija za prvi razred Matematičke gimnazija, Krug, Beograd, 1998
3. Малчески, Р., Гроздев, С., Аневска, К.: Геометрија на комплексен број, Армаганка, Скопје, 2019, https://matematickitalent.mk/
4. Самарџиски, А.: Хомотетија, инверзија и задачи на Аполониј, Природно-математички факултет, Скопје, 1988