

Регионален натпревар 1987

I година

1. Ана, Борче, Весна и Горан ги освоиле првите четири награди на натпреварот по математика. Нивните професори се Илиевски, Јовановски, Костовски и Лазов. Учениците заедно со своите професори дошле од градовите Прилеп, Ресен, Скопје и Тетово.

(1) Ученикот на професорот Костовски не освоил на прва ни втора награда. (2) Весна освоила прва награда. (3) Ученикот од Тетово освоил втора награда. (4) Ана е од Прилеп. (5) Горан, ученикот на професор Јовановски освоил четврта награда. (6) Професорот Лазов е од Ресен.

Решение. Формираме таблица со четири редици и четири колони. Во првата редица ги ставаме имињата на учениците, во втората наградата што секој од учениците ја освоил, во третата нивните професори и во четвртата градовите. (Ќе ги пишуваме само првите букви од имињата). Според условите (2), (4) и (5) табелата можеме да ја пополниме на начин кој што е прикажан.

ученик	А	Б	В	Г
награда			I	IV
професор				J
град	П			

Бидејќи само во колоната на Борче непознати се наградата и градот истовремено, според условот (3) добиваме дека Борче е од Тетово и освоил втора награда. Понатаму, според условите (5) и (1) добиваме дека ученикот на професорот Костовски е Ана и таа освоила III награда. Сега табелата изгледа како на цртежот десно.

ученик	А	Б	В	Г
награда	III	II	I	IV
професор	К			J
град	П	Т		

Бидејќи само во колоната на Весна непознати се професорот и градот истовремено, според условот (6) имаме дека Весна е ученик на професорот Лазов и дека таа е од Ресен.

2. Секое теме на правоаголникот триаголник ABC со катети $\overline{AB} = 4\sqrt{3}$ и $\overline{AC} = 4$ е центар на кружница при што трите кружници се допираат меѓусебно и ни една кружница не лежи во внатрешноста на друга кружница. Пресметај ја плоштината на делот од триаголникот ABC што лежи надвор од трите кружници.

Решение. Бидејќи $\overline{BC} = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2} = 8 = 2\overline{AC}$, аглиите α, β и γ при темињата A, B и C ќе бидат $90^\circ, 30^\circ$ и 60° соодветно. Користејќи ги ознаките од цртежот, ќе ставиме

$$x = \overline{AB_1} = \overline{AC_1}, y = \overline{BA_1} = \overline{BC_1}, x = \overline{AC_1} = \overline{CB_1}.$$

Според тоа го добиваме системот равенки:

$$x + y = 4\sqrt{3}; \quad y + z = 8; \quad z + x = 4.$$

Негово решение е

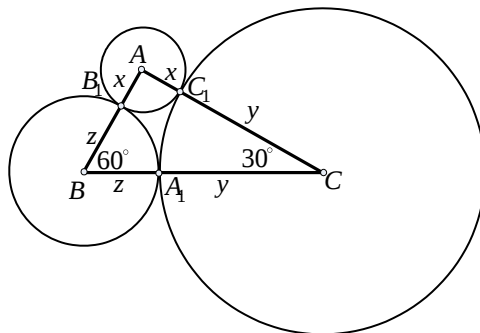
$$x = 2\sqrt{3} - 2, \quad y = 2\sqrt{3} + 2, \quad z = 6 - 2\sqrt{3}$$

Значи, збирот од плоштините на исечоците со темиња во A, B и C ќе биде:

$$\begin{aligned} \frac{x^2\pi}{4} + \frac{y^2\pi}{12} + \frac{z^2\pi}{6} &= \frac{\pi}{12}(3x^2 + y^2 + 2z^2) \\ &= \frac{8\pi}{3}(5 - 2\sqrt{3}) \end{aligned}$$

Бараната плоштина P ќе изнесува

$$P = 8\sqrt{3} - \frac{8\pi}{3}(5 - 2\sqrt{3}).$$



3. Пресметај ги брзината и должината на возот кој за 8 секунди поминува покрај неподвижен набљудувач, а за 12 секунди го поминува перонот долг 480 метри.

Решение. Нека v е брзината на возот изразена во m/s , а s е неговата должина во метри. Тогаш од условот на задачата имаме:

$$v = \frac{s}{8} \text{ и } v = \frac{s+480}{32}.$$

Од тука добиваме $s = 160 \text{ m}$ и $v = 20 \text{ m/s}$ ($= 72 \text{ km/h}$).

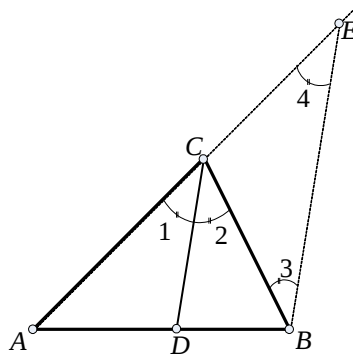
4. Во триаголникот ABC , симетралата на аголот при темето C ја сече страната AB во точката D . Да се докаже дека

$$\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{CA} : \overline{CB}.$$

Решение. Од темето B на триаголникот ABC повлекуваме права $BE \parallel DC$, при што $E \in AC$.

Аглите што при тоа се добиваат да ги означиме како на цртежот. Бидејќи $BE \parallel DC$ имаме $\angle 3 = \angle 2 = \angle 1$. Значи, $\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4$, од каде добиваме $\angle 1 = \angle 4$, т.е. $\angle 3 = \angle 4$. Според тоа, триаголникот BEC е рамнокрак, па $\overline{CE} = \overline{CB}$. Од сличноста на триаголниците ADC и ABE добиваме дека

$$\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AC} : \overline{CE} = \overline{AC} : \overline{CB}.$$



1. Да се пресмета збирот

$$S = \frac{1-i}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1987},$$

i е имагинарна единица.

Решение. Да ставиме $z = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$. Бидејќи $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1-2i+i^2}{2} = -i$ добиваме:

$$\begin{aligned} S &= z - i + i + zi^2 - i^3 - zi^3 + i^4 + zi^4 - \dots + i^{1992} + zi^{1992} - zi^{1993} \\ &= z(1 - i + i^2 - i^3 + i^4 - \dots + i^{1992}) - i(1 - i + i^2 - i^3 + i^4 - \dots + i^{1992}) \\ &= (z - i)(1 - i + i^2 - i^3 + i^4 - i^5 + i^6 - \dots + i^{1992}) \\ &= (z - i)[(1 - i + i^2 - i^3) + (i^4 - i^5 + i^6 - i^7) + \dots + i^{992}] - zi^{993} \\ &= (z - i) - zi = \frac{1-i}{\sqrt{2}} - i - \frac{1-i}{\sqrt{2}}i \\ &= \frac{-2i-i\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -i(\sqrt{2} + 1) \end{aligned}$$

2. Еден базен се полни со 2 цевки. Двете заедно го полнат базенот за 12 часа. Ако првата цевка сама го исполни базенот до половина, а втората цевка сама продолжи да го дополнува базенот, тогаш целиот базен ќе се наполни за 25 часа. За колку време секоја цевка сама може да го наполни базенот?

Решение. Нека x е бројот на часови за кои првата цевка сама го полни базенот, а y е бројот на часови за кои втората цевка сама го полни базенот. Од условите на задачата го добиваме следниот систем равенки

$$\begin{cases} \frac{12}{x} + \frac{12}{y} = 1 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 25 \end{cases}.$$

Од втората равенка добиваме $y = 50 - x$, и ако ова го замениме во првата равенка ја добиваме квадратната равенка

$$x^2 - 50x + 600 = 0.$$

Решенија на ова равенка се $x_1 = 20$, $x_2 = 30$. Значи, првата цевка го полни базенот за 20 (30) часа, а втората за 30 (20) часа.

3. Во еднакворабна тристана пирамида (правилен тераедар) со волумен V , впишана е правилна еднакворабна тристрана призма така што три нејзини темиња лежат на основата, а другите три на бочните рабови на пирамидата. Да се пресмета волуменот на призмата!

Решение. Нека a, H, b се соодветно должините на: работ на тетраедарот, висината на тетраедарот, и работ на призмата. Нека DT е висината спуштена од врвот D на основата ABC (види цртеж). Од сличноста на триаголниците ATD и $NT'D$ следува

$$\overline{AT} : \overline{NT'} = \overline{DT} : \overline{T'D}.$$

Бидејќи $AB \parallel KL$, триаголниците ABT и CTL се слични, па според тоа

$$\overline{AT} : \overline{KT} = \overline{AB} : \overline{KL}.$$

Од горните две равенства и од $\overline{KT} = \overline{NT'}$ добиваме дека $a : b = H : (H - b)$, што заедно со

$$H = \frac{a\sqrt{6}}{3}, \text{ повлекува дека } b = \frac{aH}{a+H} = a(\sqrt{6} - 2).$$

Значи, волуменот V_1 на призмата е

$$V_1 = \frac{b^3\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}(6 - \sqrt{2})^3.$$

Бидејќи $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$, добиваме дека

$$\frac{V_1}{V} = \frac{3\sqrt{3}(\sqrt{6}-2)^3}{\sqrt{2}}, \text{ т.е. } V_1 = 6V(27 - 11\sqrt{6}).$$

4. Да се реши по x равенката

$$\sqrt{x - \sqrt{x - a}} = a.$$

Решение. Со квадрирање на ирационалната равенка добиваме

$$x - \sqrt{x - a} = a^2 \text{ или } \sqrt{x - a} = x - a^2.$$

Со повторно квадрирање ја добиваме следната квадратна равенка

$$x^2 - (2a^2 + 1)x + a^4 + a = 0,$$

чиј решенија се:

$$x_1 = a^2 + a, \quad x_2 = a^2 - a + 1.$$

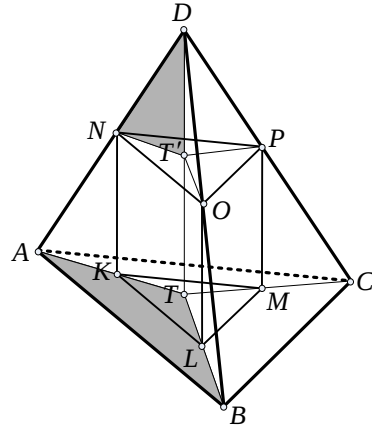
Треба да се провери во кој случај тие се решенија на ирационалната равенка. За

$a < 0$ равенката нема решение. Затоа нека $a \geq 0$, т.е. $\sqrt{a^2} = a$. Ако вредноста $x = a^2 + a$ ја замениме во ирационалната равенка добиваме:

$$\sqrt{a^2 + a} - \sqrt{a^2 + a - a} = \sqrt{a^2 + a - a} = a.$$

Значи, $x = a^2 + a$ е решение на ирационалната равенка, за секое $a \geq 0$.

Ако вредноста $x = a^2 - a + 1$ ја замениме во ирационалната равенка, добиваме:



$$\sqrt{a^2 - a + 1} \sqrt{a^2 - a + 1 - a} = \sqrt{a^2 - a + 1 - |a - 1|} = \begin{cases} a, & \text{за } a \leq 1 \\ \sqrt{a^2 - 2a - 2}, & \text{за } a > 1 \end{cases}.$$

Бидејќи за $a > 1$, $\sqrt{a^2 - 2a - 2} < a$ добиваме дека $x = a^2 - a + 1$ е решение на ирационалната равенка само за $0 \leq a \leq 1$.

Заклучок. Равенката има две решенија за $0 \leq a \leq 1$, едно решение за $a > 1$ и нема решенија за $a < 0$.

III година

1. Да се пресметаат $\lg 2$ и $\lg 5$ ако се знае дека $\lg 2 \cdot \lg 5 = 0,210$.

Решение. Нека $\lg 2 = x_1$ и $\lg 5 = x_2$. Тогаш за x_1 и x_2 важи

$$x_1 \cdot x_2 = 0,210$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

па x_1 и x_2 се решенија на квадратната равенка

$$x^2 - x + 0,210 = 0.$$

Решенијата на ова равенка се $0,7$ и $0,3$. Бидејќи $\lg 2 < \lg 5$, добиваме дека $\lg 2 = 0,3$ и $\lg 5 = 0,7$.

2. Во интервалот $0 \leq x \leq \pi$ да се најдат решенијата на равенката

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} = 2\sqrt{2}.$$

Решение. Бројот x е решение на горната равенка ако и само ако x е решение на системот

$$\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}\right)^2 = 8 \quad (1)$$

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} \geq 0 \quad (2)$$

Од равенката (1) имаме

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{2}{\sin x \cos x} = 8;$$

$$\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} - \frac{2}{\sin x \cos x} = 8;$$

$$\frac{4}{\sin^2 2x} - \frac{4}{\sin 2x} = 8,$$

$$2 \sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0.$$

Ставајќи $y = \sin 2x$ добиваме квадратна равенка по y чии решенија се $y_1 = -1$,

$y_2 = \frac{1}{2}$. Решенија на равенката $\sin 2x = -1$ во интервалот $[0, \pi]$ се $x = \frac{3\pi}{4}$ и $x = \frac{\pi}{12}$

, а на равенката $\sin 2x = \frac{1}{2}$ е $x = \frac{5\pi}{12}$. Останува да се провери дали за овие вредности е исполнето неравенството (2), т.е.

$$\frac{1}{\sin x} \geq \frac{1}{\cos x}.$$

Бидејќи на интервалот $[0, \pi]$, $\sin x \geq 0$, неравенството (2) е секогаш исполнето за $\cos x < 0$, т.е. за сите $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$. Ако $\cos x > 0$, тогаш неравенството се трансформира во $\cos x \geq \sin x$, кое е исполнето за сите $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Конечно, решенија на почетната равенка се решенијата на (1) кои лежат во $(0, \frac{\pi}{4}] \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$, т.е. $x = \frac{3\pi}{4}$ и $x = \frac{\pi}{12}$.

3. За кој природен број a равенката $x^2 + y^2 = axy$ има решенија во множеството природни броеви.

Решение. Ако ја разгледаме равенка како квадратна равенка по y , т.е.

$$y^2 - axy + x^2 = 0,$$

$$\text{тогаш } y_{1/2} = \frac{ax \pm x\sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

За да решението е природен број, мора $a^2 - 4$ да е полн квадрат, т.е. мора да постои природен број k така што

$$a^2 - 4 = k^2$$

односно

$$a^2 - k^2 = 4,$$

$$(a - k)(a + k) = 4.$$

Бидејќи a и k се природни броеви $a + k$ е природен број па заради горното равенство $a - k$ е природен број. Уште мора $a + k \geq a - k$. Заради ова можни се следниве два случаи:

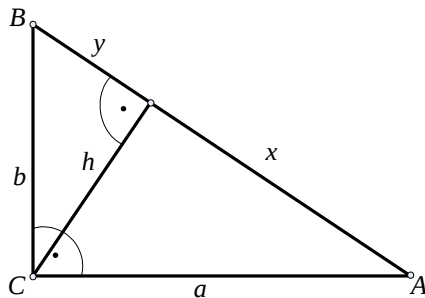
а) $a - k = 2, a + k = 2$, што повлекува $a = 2, k = 0$

б) $a - k = 1, a + k = 4$, што повлекува $a = \frac{5}{2}, k = \frac{3}{2}$.

Бидејќи само во случајот а) a е природен број, единствено решение на задачата е $a = 2$.

4. Ако со V_a, V_b, V_c се означат волумените на телата добиени со ротација на правоаголен триаголник околу катетата a , катетата b и хипотенузата c соодветно, тогаш важи равенството

$$\frac{1}{V_a^2} + \frac{1}{V_b^2} = \frac{1}{V_c^2}.$$



Докажи!

Решение. Нека ABC е правоаголен триаголник со прав агол кај темето C , $\overline{AC} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{AB} = c$, $\overline{CD} = h$ -висината спуштена од темето C на хипотенузата, $x = \overline{AD}$ и $y = \overline{BD}$ (види цртеж). Тогаш:

$$V_c = \frac{\pi}{3} h^2 x + \frac{\pi}{3} h^2 y = \frac{\pi}{3} h^2 c = \frac{\pi}{3} \frac{a^2 b^2}{c^2} c = \frac{\pi}{3} \frac{a^2 b^2}{c}$$

Понатаму,

$$\frac{1}{V_a^2} + \frac{1}{V_b^2} = \frac{1}{(\frac{\pi}{3} b^2 a)^2} + \frac{1}{(\frac{\pi}{3} a^2 b)^2} = \frac{1}{(\frac{\pi}{3})^2 \frac{a^4 b^4}{c^2}} = \frac{1}{V_c^2}$$

IV година

1. На колку различни начини можат да се распоредат n -жени и n -мажи така што било било кои два соседи да не бидат од ист пол и тоа:

- а) во една редица,
- б) на еден рингишпил кој има $2n$ седишта.

Решение. Нека со $a_1, a_2, \dots, a_n$ ги означиме жените, а со $b_1, b_2, \dots, b_n$ мажите.

а) Ги разгледуваме низите од облик $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$ (кога жена е на прво место). За еден фиксен распоред на $a_1, a_2, \dots, a_n$ се добиваат $n!$ распореди на $b_1, b_2, \dots, b_n$. Значи, има $n!n! = (n!)^2$ распореди од ваков облик. Исто толку распореди има од облик $b_1, a_1, b_2, a_2, \dots, b_n, a_n$ (кога маж е на прво место). Значи, вкупниот број на вакви распореди е $2(n!)^2$.

б) Да фиксираме еден елемент од множеството $b_1, b_2, \dots, b_n$. Преостанатите елементи од ова множество може да се распоредат на $(n-1)!$ начини. При секој ваков распоред $a_1, a_2, \dots, a_n$ може да се распоредат на $n!$ начини. Значи, бараниот број на распореди е $(n-1)n!$.

2. Нека $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ е аритметичка прогресија, и нека m е даден природен број. Ако ставиме

$$S_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_m$$

$$S_2 = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{2m}$$

$$S_3 = a_{2m+1} + a_{2m+2} + \dots + a_{3m}$$

.....

докажи дека и $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ е аритметичка прогресија.

Решение. Од условот на задачата $S_k = a_{(k-1)m+1} + a_{(k-1)m+2} + \dots + a_{km}$. Нека d е разликата во аритметичката прогресија $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Од познатите формули за

општ член на аритметичката прогресија и збир од последователни m нејзини членови добиваме:

$$\begin{aligned} S_{k+1} - S_k &= \frac{m}{2} (a_{km+1} + a_{(k+1)m}) - \frac{m}{2} (a_{(k-1)m+1} + a_{km}) \\ &= \frac{m}{2} (a_1 + kmd + a_1 + [(k+1)m-1]d) - \frac{m}{2} (a_1 + (k-1)md + a_1 + (km-1)d) \\ &= m^2 d \end{aligned}$$

Значи, $S_1, S_2, \dots, S_k, \dots$ е аритметичка прогресија со разлика $m^2 d$.

3. Да се реши тригонометриската равенка

$$\sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{3x}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}\right).$$

Решение. Запишувајќи ја дадената равенка во обликот

$$\sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{3x}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}\right)$$

и користејќи ја формулата за разлика на синуси се добива

$$2 \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{5}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}\right).$$

Користејќи ја тригонометриската врска $\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ равенката ја трансформираме во

$$2 \sin\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}\right),$$

т.е.

$$\sin\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}\right) [2 \sin\left(x - \frac{\pi}{10}\right) - 1] = 0.$$

Од последната равенка, следува

$$\sin\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}\right) = 0 \quad \text{или} \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{10}\right) = \frac{1}{2}.$$

Од првата равенка се добива

$$\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

а од втората

$$x - \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x - \frac{\pi}{10} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Значи решенијата на дадената равенка се:

$$x = \frac{3+10k}{5} \pi, \quad x = \frac{4+30k}{15} \pi, \quad x = \frac{14+30k}{15} \pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

4. Да се определи геометриското место на центрите на кружинците што минуваат низ точката $A(3,0)$ и ја допираат кружницата $x^2 + y^2 = 25$.

Решение. Нека точката $M(p,q)$ припаѓа на бараното геометриско место на точки од задачата. Тогаш постои кружница со центар во M

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 \tag{1}$$

која минува низ точката A и ја допира дадената кружница.

Бидејќи кружницата (1) минува низ точката A добиваме

$$(3-p)^2 + (0-q)^2 = r^2,$$

т.е.

$$r^2 - p^2 - q^2 = 9 - 6p. \quad (2)$$

Бидејќи кружницата (1) ја допира дадената кружница, системот

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y^2 - 2(px + qy) = r^2 - p^2 - q^2 \end{cases}$$

кој со оглед на (2) се запишува во облик

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y^2 - 2(px + qy) = 9 - 6p \end{cases} \quad (3)$$

има единствено решение. Ако од првата равенка на системот (3) ја одземеме втората равенка се добива $qy = 8 + 3p - px$.

Единствената точка на бараното геометриско место на точки, за која $q = 0$ е точката $M_0(-1, 0)$. Ќе го разгледаме бараното место точки без ова точка, т.е. ќе претпоставиме дека $q \neq 0$. Тогаш $y = \frac{8+3p-px}{q}$.

Ако ова вредност ја замениме во првата равенка од системот (3) добиваме квадратна равенка по x

$$x^2 - \frac{2p(8+3p)}{p^2+q^2}x + \frac{(8+3p)^2-25q^2}{p^2+q^2} = 0. \quad (4)$$

Бидејќи системот (3) има единствено решение, и равенката (4) има единствено решение, односно мора дискриминантата на квадратната равенка да биде еднаква на нула, т.е.

$$4 \frac{p^2(8+3p)^2}{(p^2+q^2)^2} - 4 \frac{(8+3p)^2-25q^2}{p^2+q^2} = 0.$$

Ова равенство се трансформира во $16p^2 + 25q^2 - 48p - 64 = 0$ или

$$\frac{(p-\frac{3}{2})^2}{(\frac{5}{2})^2} + \frac{q^2}{4} = 1.$$

Исто така точката $M_0(-1, 0)$ ја задоволува ова равенка. Значи бараното геометриско место на точки е елипса.