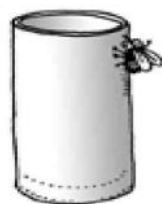


Ристо Малчески
Скопје

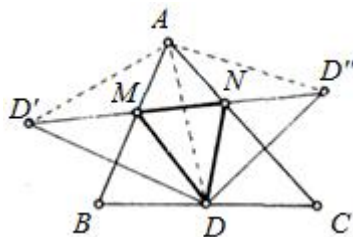
КАКО ДА И ПОМОГНЕТЕ НА МУВА КОЈА НЕ ЗНАЕ ГЕОМЕТРИЈА (втор дел)

Во [7] се разгледани неколку екстремални проблеми, за чие решавање се користени елементарни знаења од геометријата. Имено, решенијата на сите задачи во [7] следуваат од неравенството на триаголник. Понатаму, во [8] се разгледани неколку екстремални проблеми поврзани со коцката и квадарот и истите се решени со помош на неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, а во [6] е дадено решението на екстремален проблем кој е непосредно поврзан со пчелиното саќе. Во продолжение дополнително ќе презентираме уште неколку екстремални проблеми, кои исто така ќе бидат решени со помош на елементарни геометриски тврдења.



Задача 1. Од сите триаголници впишани во даден остроаголен триаголник ABC чие едно теме е дадена точка D од страната BC определи го триаголникот кој има најмал периметар.

Решение. Нека D е дадена точка на страната BC на $\triangle ABC$ (цртеж десно). Бидејќи D е во внатрешноста на остриот $\angle BAC$, определувањето на бараниот триаголник со најмал периметар се сведува на задачата 3, [9]. Со други зборови, прво ќе ја пресликаме точката D симетрично во однос на правите AB и AC во точките D' и D'' . Потоа ја повлекуваме правата $D'D''$ која ги сече правите AB и AC во точките M и N . Сега, бараниот триаголник е $\triangle DNM$. ■



Задача 2. Во даден остроаголен $\triangle ABC$ впиши триаголникот со најмал можен периметар.

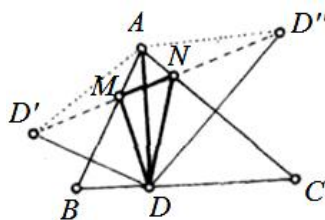
Решение. Ако точката D е фиксна точка на страната BC , тогаш според задача 1 периметарот на впишаниот триаголник со најмал можен периметар е еднаков на должината на отсечката $D'D''$, каде D' и D'' се симетричните точки на точката D во однос на страните AB и AC , соод-

ветно. Затоа доволно е да ја определеме положбата на точката D кога отсечката $D'D''$ има најмала должина.

Од осната симетрија следува $\overline{AD'} = \overline{AD} = \overline{AD''}$ (види цртеж горе). Понатаму, повторно од осната симетрија добиваме

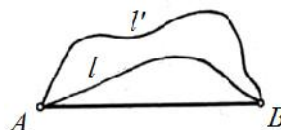
$$\begin{aligned}\angle D'AD'' &= \angle D'AB + \angle BAD + \angle DAC + \angle CAD'' \\ &= 2\angle BAD + 2\angle DAC = 2\angle BAC,\end{aligned}$$

што значи дека големината на $\angle D'AD''$ не зависи од положбата на точката D на страната BC . Бидејќи за секоја положба на точката D аголот при врвот на рамнокракиот $\triangle D'D''A$ е еднаков, тој ќе има најмала основа, а тоа е периметарот на впишаниот триаголник, кога неговиот крак AD' има најмала можна вредност. Но, $\overline{AD'} = \overline{AD}$, па затоа бараната положба на точката D е кога таа е подножје на висината повлечена од темето A (цртеж десно). ■



Забелешка 1. При решавањето на претходните задачи користевме дека најкраткото растојание меѓу две точки A и B е отсечката AB . Во следната задача ќе го користиме тврдењето:

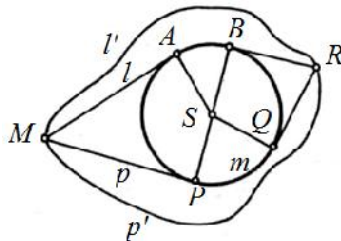
Ако линијата l' со почетна точка A и крајна точка B ја опфаќа испупчената линија l со истите почетна и крајна точка (цртеж десно), тогаш $l' > l$.



Доказот на ова важно тврдење следува од фактот што линијата l може да биде опфатена од конвексна искршена линија k чии точки припаѓаат на линијата l' . Притоа лесно се гледа дека за должините на трите линии важи $l' \geq k > l$.

Задача 3. Во точката M се наоѓа глушец, а пред неговата дупка R е поставена стапица m во кружен облик. Глушецот треба да стигне до својата дупка, но притоа да не згазне во кругот на стапицата. Најди го најкраткиот можен пат за глушецот.

Решение. Нека тангентите повлечени од точката M ја допираат кружницата m во точките A и P , а тангентите повлечени од точката R ја допираат кружницата во точките B и Q . Ако должината на лакот $\widehat{AB}$ е

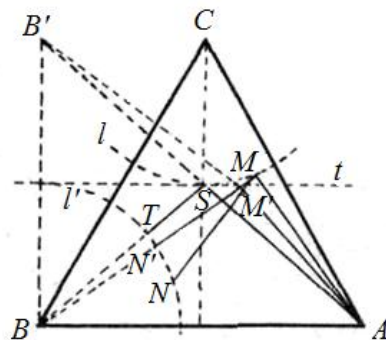


помала или еднаква на должината на лакот $\widehat{PQ}$, тогаш најкраткиот пат l глушецот го поминува кога се движи по отсечката MA , па по лакот $\widehat{AB}$ и по отсечката BR . Навистина ако l' е друг пат кој го опфаќа l (види цртеж), тогаш од забелешка 1 следува дека $l < l'$. Понатаму, ако p и p' се два патишта од другата страна на центарот на кругот S (види цртеж), тогаш од својствата на тангентните отсечки, изборот $\widehat{AB} \leq \widehat{PQ}$ и забелешка 1 следува дека

$$l = \overline{MA} + \widehat{AB} + \overline{BR} = \overline{MP} + \widehat{AB} + \overline{QR} \leq \overline{MP} + \widehat{PQ} + \overline{QR} = p < p'. \blacksquare$$

Задача 4. Војник се наоѓа во точката A и треба да испита минирана област ABC , во форма на рамностран триаголник. За испитувањето тој користи детектор за откривање мини чиј опсег има дијаметар еднаков на висината h на триаголникот ABC . Најди го најкраткиот пат по кој војникот треба да се движи, при што ќе ја испита целата област.

Решение. За да испита некоја точка од областа, војникот треба да ѝ се приближи на растојание помало или еднакво на $\frac{h}{2}$. Специјално тоа важи и за точките B и C . Според тоа, војникот мора во некој момент да дојде во некоја точка, на пример M , од кружниот лак l и во некоја точка N од кружниот лак l' , со радиуси $\frac{h}{2}$, соодветно опишани околу



C и B (цртеж десно). Нека, на пример, прво стигнал во точката M , а потоа во точката N (заради симетрија, заклучувањето е слично и ако прво стигнал во точката N). Ќе докажеме дека најкраткиот пат се добива кога точката M е средината S на висината спуштена од темето C на $\triangle ABC$, а N е точката T во која отсечката SB го сече лакот l' .

Навистина, ако N' е пресечната точка на MB и лакот l' , тогаш од неравенството на триаголник за најкраткиот пат од A преку M до N добиваме:

$$\begin{aligned} \overline{AM} + \overline{MN} &\geq \overline{AM} + (\overline{MB} - \overline{BN}) \\ &= \overline{AM} + (\overline{MB} - \overline{BN'}) \\ &= \overline{AM} + \overline{MN'}. \end{aligned} \tag{1}$$

Нека t е тангентата на l повлечена во точката S и M' пресечната точка на BM и t , а B' е точката симетрична на B во однос на правата t . Тогаш

$$\begin{aligned}
 \overline{AM} + \overline{MN}' &= \overline{AM} + \overline{MB} - \overline{BN}' \\
 &= \overline{AM} + \overline{MM}' + \overline{M'B} - \overline{BN}' \\
 &\geq \overline{AM}' + \overline{M'B} - \overline{BN}' \\
 &= \overline{AM}' + \overline{M'B}' - \overline{BN}' \\
 &\geq \overline{AB}' - \overline{BN}' \\
 &= \overline{AS} + \overline{SB}' - \overline{BN}' \\
 &= \overline{AS} + \overline{SB} - \overline{BT} \\
 &= \overline{AS} + \overline{ST}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Конечно, од (1) и (2) следува неравенството

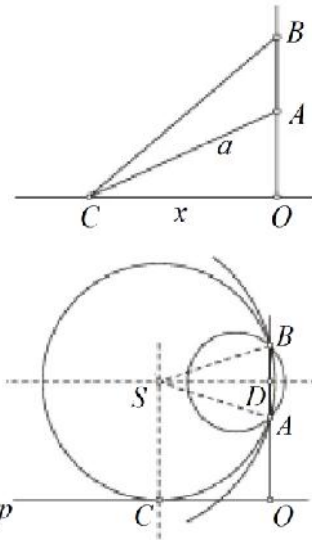
$$\overline{AM} + \overline{MN} \geq \overline{AS} + \overline{ST},$$

што и требаше да се докаже. ■

Задача 5. На сид е закачена слика AB (цртеж десно). Определи го растојанието x од точката C до точката O така што сликата најдобро ќе се гледа од точката C . (Познато е дека сликата најдобро се гледа од точката C за која видниот агол $\angle ACB$ е најголем.)

Решение. Конструираме кружница која минува низ точките A и B . Видниот агол под кој се гледа отсечката AB е еднаков за сите точки кои припаѓаат на таа кружница (периферен агол над дадена тетива). Овој агол се зголемува со намалување на радиусот на кружницата (Зошто?). Но, нас не интересираат само точките од правата p , па затоа решение на задачата е точката C од правата p која истовремено се наоѓа на кружницата која минува низ точките A и B , а која има најмал можен радиус. Тоа всушност е кружницата која минува низ точките A и B и во точката C ја допира правата p (види цртеж). Нека $\overline{OC} = x$, $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$. Тогаш

$$x = \overline{OC} = \overline{DS} = \sqrt{\overline{AS}^2 - \overline{DA}^2} = \sqrt{\overline{SC}^2 - \overline{DA}^2} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}. \blacksquare$$



Задача 6. Мува се наоѓа во точката A на коцката прикажана на цртежот десно. Ако должината на работ на коцката е a , колкава е должината на најкраткиот пат кој треба мувата да го помине по сидовите на коцката за да стигне во точката B ?

Решение. На прв поглед изгледа дека задачата е тривијална, и дека решението на истата е дадено на цртежот десно, при што најкраткиот пат е еднаков на $2a$. Ова решение соодветствува на расекувањето на коцката во мрежа во која двата сида на кои се наоѓаат точките A и B имаат заедничка страна (заеднички раб).

Меѓутоа, ќе докажеме дека постои и пократок пат по кој мувата може да стигне во точката B . Последното ќе го докажеме расекувајќи ја коцката во мрежа во која двата сида на кои се точките A и B имаат само една заедничка точка, односно имаат заедничко теме (цртеж долу).

Бидејќи најкраткото растојание меѓу две точки е отсечката која ги поврзува, за да ја определиме должината на патот кој, во овој случај, мувата треба да го помине треба да ја определиме должината на хипотенузата AB на рамнокракиот правоаголен триаголник со катети $a + 0,4a = 1,4a$. При тоа од Питагоровата теорема следува

$$d = \sqrt{(1,4a)^2 + (1,4a)^2} = 1,4a\sqrt{2}.$$

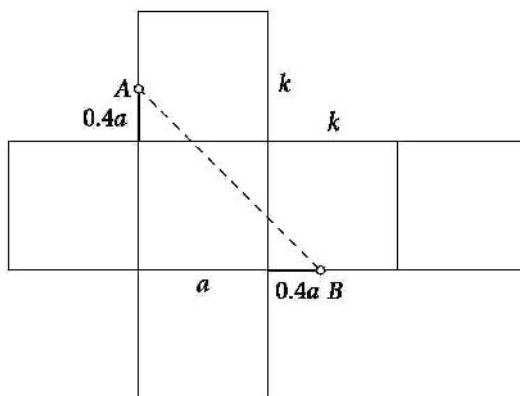
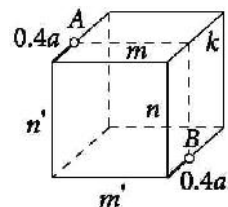
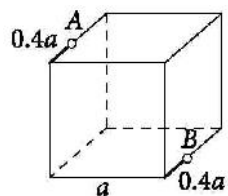
Јасно, бидејќи $1,4 < \sqrt{2}$, добиваме

$$d = 1,4a\sqrt{2} < \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}a = 2a.$$

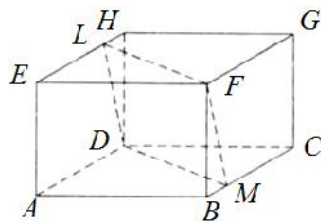
Постои и трето расекување на коцката со кое се добива мрежа во која сидовите на кои се наоѓаат точките A и B немаат заедничка точка (направи цртеж), но во тој случај се добива растојание

$$d' = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5} > 2a > d.$$

Конечно, бараното најкратко растојание е $d = 1,4a\sqrt{2}$. ■



Задача 7. Во соба во облик на паралелопипед $ABCDEFGH$, на таванот, во темето F , се наоѓа пајак (цртеж десно), а на подот во спротивното теме D спие мува. Кој е најкраткиот пат по кој пајкот може да дојде до мувата?



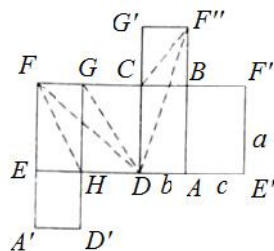
Решение. На прв поглед изгледа дека пајакот треба да го помине таванот по дијагоналата FH и да слезе по работ HD . Но, ако малку повнимателно погледнеме, ќе забележиме дека пајакот до целта може да стигне и по дијагоналата FC и работ CD , но и по дијагоналата FA и работ AD .

Паралелопипедот е симетричен во однос на средината на дијагоналата FD , па затоа должините на патиштата FBD , FED и FGD соодветно се еднакви на должините на патиштата FHD , FCD и FAD .

Кој од овие три патишта е решение на задачата? Ќе докажеме дека ниту првиот, ниту вториот, ниту третиот од овие патишта не е најкраткиот пат, т.е. дека постои уште пократок пат.

Заради симетричноста на паралелопипедот, можеме да сметаме дека најкраткиот пат не минува преку сидот $ADHE$. На пример, должината на патот DLF е еднаква на должината на патот DMF . Оттука може да се смета дека бараниот пат не сече еден од рабовите GH, GC, BA или BC . Заради симетичноста на рабовите BA и GH , можеме да земеме дека бараниот пат сече еден од рабовите GH, GC или BC .

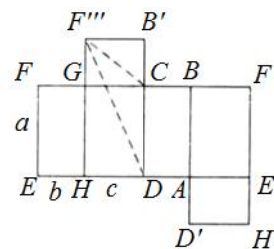
Мрежата на паралелопипедот $ABCDEFGH$ кој ја прикажува нашата соба е како на цртежот десно.



Пајакот е во точката F , а мувата во точката D . Од цртежот десно лесно се заклучува дека патиштата FHD и FGD не се најкратки патишта меѓу мувата и пајакот, бидејќи од неравенството на триаголник следува дека $\overline{FD} < \overline{FH} + \overline{HD}$ и $\overline{FD} < \overline{FG} + \overline{GD}$, при што $\overline{FD}$ е најкраткиот пат меѓу сите патишта кои го сечат работ GH .

Аналогно $\overline{DF''}$ е најкраткиот од сите патишта кои го сечат работ BC (точката F'' соодветствува на темето F на нашиот паралелопипед). Со други зборови патот $\overline{DF''}$ е пократок од патот $\overline{FCD}$.

За да го согледаме најкраткиот пат кој го сече



работ CG , мрежата на собата да ја нацртаме како што е прикажано на горниот десен цртеж. Повторно од неравенството на триаголник е јасно дека DF''' е најкраткиот од сите патишта кои го сечат работ CG .

Останува уште да определиме кој од патиштата DF , DF'' и DF''' е најкраток. Јасно, одговорот на поставеното прашање зависи од должините на рабовите на собата. Ако $\overline{AB} = a$, $\overline{AD} = b$ и $\overline{AE} = c$, тогаш од Питагоровата теорема добиваме

$$\overline{DF} = \sqrt{a^2 + (b+c)^2},$$

$$\overline{DF''} = \sqrt{(a+c)^2 + b^2},$$

$$\overline{DF'''} = \sqrt{(a+b)^2 + c^2}.$$

Откако ќе се ослободиме од заградите, добиваме дека поткореновите изрази се разликуваат само во членовите $2bc, 2ac$ и $2ab$. Ако секој од трите производи го поделиме со $2abc$, ги добиваме изразите $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ и $\frac{1}{c}$.

Сеха е јасно дека:

- за $a > b$ и $a > c$ најкраток е патот DF ,
- за $b > a$ и $b > c$ најкраток е патот DF'' ,
- за $c > a$ и $c > b$ најкраток е патот DF''' .

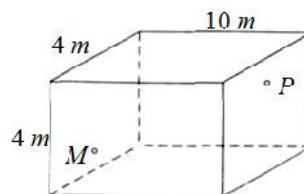
Според тоа, најкраток е патот кој го сече најдолгиот од рабовите: GH, CD или BC . ■

Задачи за самостојна работа

1. Дадена е права p и точки A и B . На правата p определи точка M така што разликата $|\overline{AM} - \overline{BM}|$ ќе биде најголема ако:
 - а) точките A и B се од иста страна на правата p , а правите AB и p не се паралелни,
 - б) точките A и B се на различни страни од правата p .
2. Дадени се точки A и B од иста страна на правата p . На правата p најди отсечка CD со дадена должина m така што искршената линија $ACDB$ ќе има најмала можна должина.
3. Определи го најкраткиот пат на сидовите на коцката $ABCDEFGH$ од средината I на работ BF до средината J на работ GH .

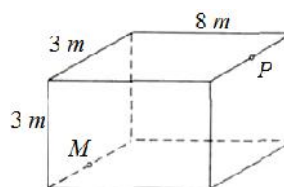
4. На сидовите на тетраедарот $SABC$ определи го најкраткиот пат од средината D на работ SC до средината E на работ AB .

5. Соба има облик на правоаголен паралелопипед со димензии како на цртежот десно. Да ги разгледаме двата спротивни зида со квадратен облик. На средината на таков сид меѓу таванот и подот, на $\frac{1}{3}m$ од таванот во точката P се наоѓа



пајак, а на средината на спротивниот сид на $\frac{1}{3}m$ од подот во точката M спие мува. Како пајакот ќе стигне до мувата, при што ќе помине најкраток пат? Колку е долг тој пат?

6. Соба има облик на правоаголен паралелопипед со димензии како на цртежот десно. Да ги разгледаме двата спротивни зида со квадратен облик. На средината на работ меѓу таванот и еден таков сид во точката P се наоѓа пајак, а на средината на работ меѓу спротивниот сид и подот во точката M спие мува. Како пајакот ќе стигне до мувата, при што ќе помине најкраток пат? Колку е долг тој пат?



Литература

- Đerasimović, B., Geometrijsko određivanje nekih ekstremnih vrednosti, Matematički list, Beograd
- Devidé, V., Elementarno rešavanje nekih problem o ekstremima (1), Matka, 69, 2009-2010
- Devidé, V., Elementarno rešavanje nekih problem o ekstremima (2), Matka, 70, 2009-2010
- Đorić, M., Problem najkraćeg puta kao jedan od ekstremalnih problema, Matematički list, Beograd
- Georgijević, D., Kako naći najkarći put, Matematički list, Beograd
- Malčeski, R. (2014). Honeycomg - a Genius Creation of Nature, Mathematics and Informatics, Vol. 57, No. 4, pp. 402-407

7. Малчески, Р., Како да и помогнете на мува која не знае геометрија, Нумерус (Математички талент), Скопје , 1997 (2021)
8. Малчески, С., Докажување неравенства со разложување и со неравенствата меѓу средините (продолжение), Математички талент, Скопје, 2023
9. Симић, Б., Мува у центру пажње, Математилки лист, XXXII 2, Београд