БМО 1987

1. Нека $a\in\mathbb{R}$ и функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е таква што

   1) $f(x+y)=f(x)f(a-y)+f(y)f(a-x)$, за секои $x,y\in\mathbb{R}$

   2) $f(0)=\frac{1}{2}$.

   Докажи, дека $f=\text{const}$.

   Решение. *Прв начин.* Ако во 1) ставиме $x=y=0$ добиваме $f(a)=\frac{1}{2}$. Тогаш за $x=0$ и произволно y добиваме $f(y)=\frac{1}{2}f(a-y)+\frac{1}{2}f(y)$, од каде следува дека $f(y)=f(a-y)$. Сега равенството од условот може да се запише во видот $f(x+y)=2f(x)f(y)$, за секои $x,y\in\mathbb{R}$. Ако го искористиме последното равенство последователно добиваме

$$f(x+y)=2f(x)f(y)=2f(a-x)f(y)=f(a-x+y).$$

   За $y=-x$ имаме $\frac{1}{2}=f(0)=f(a-2x)=f(2x)$. Според тоа, за секој $z\in\mathbb{R}$ важи $f(z)=f(2\frac{z}{2})=\frac{1}{2}$.

   Втор начин. Ќе го докажеме следново поопшто тврдење:

   Нека $a\in\mathbb{R}$ и функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е таква што

   а) $f(0)=\frac{1}{n}$,

   б) $f(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)=\sum\limits_{k=1}^{n}f(\sum\limits_{i=1,\,i\neq k}^{n}x_i)f(a-x_k)$, за секои $x_1,x_2,...,x_n\in\mathbb{R}$.

   Тогаш f е константна функција.

   Доказ. Ако во б) ставиме $x_1=x_2=...=x_n=0$, добиваме $f(a)=\frac{1}{n}$, а ако ставиме $x_1=x,\,x_2=x_3=...=x_n=0$ добиваме $f(x)=\frac{1}{n}f(a-x)+\frac{n-1}{n}f(x)$, од каде следува дека $f(x)=f(a-x)$, за секој $x\in\mathbb{R}$. Од последното равенство и од условот б) следува

$$f(\sum_{i=1}^{n}x_i)=\sum_{k=1}^{n}f(\sum_{i=1,\,i\neq k}^{n}x_i)f(x_k).$$

   Нека $n=2$, т.е. $f(x_1+x_2)=2f(x_1)f(x_2)$, за секои $x_1,x_2\in\mathbb{R}$. Овој случај се совпаѓа со почетната задача. Ако во последното равенство x_1 го замениме со $a-x_1$ добиваме

$$f(a+x_2-x_1)=2f(a-x_1)f(x_2)=2f(x_1)f(x_2)=f(x_1+x_2).$$

   Ако наместо x_1 ставиме $-x_2$, од последното равенство следува

$$f(a+2x_2)=f(0)=\frac{1}{2}\text{, за секој } x_2\in\mathbb{R}.$$

Сега, ставаме $x_2=\frac{x-a}{2}$ и добиваме $f(x)=\frac{1}{2}$, за секој $x\in\mathbb{R}$.

Понатаму, ќе користме математичка индукција. Ако во б) ставиме $x_n=0$ и земеме предвид дека $f(x)=f(a-x)$, добиваме

$$f(\sum_{i=1}^{n-1}x_i)=\sum_{k=1}^{n-1}f(\sum_{i=1,\,i\neq k}^{n-1}x_i)f(x_k)+f(0)f(\sum_{i=1}^{n-1}x_i),$$

па од условот а) следува

$$\frac{n-1}{n}f(\sum_{i=1}^{n-1}x_i)=\sum_{k=1}^{n-1}f(\sum_{i=1,\,i\neq k}^{n-1}x_i)f(x_k).$$

Ако последното равенство го помножиме со $(\frac{n}{n-1})^2$ и ставиме $g(x)=\frac{n}{n-1}f(x)$, тогаш

$$g(0)=\frac{1}{n-1}\text{ и } g(\sum_{i=1}^{n-1}x_i)=\sum_{k=1}^{n-1}g(\sum_{i=1,\,i\neq k}^{n-1}x_i)g(x_k)\text{, за секои } x_1,x_2,...,x_{n-1}\in\mathbb{R}.$$

Според индуктивната претпоставка тврдењето е точно за $n-1$, што значи дека функцијата g е константна, т.е. $g(x)=\frac{1}{n-1}$, за секој $x\in\mathbb{R}$. Конечно, од $f(x)=\frac{n-1}{n}g(x)$ следува $f(x)=\frac{1}{n}$, за секој $x\in\mathbb{R}$, што и требаше да се докаже.

2. Нека $x\geq 1$ и $y\geq 1$ се такви реални броеви што броевите $a=\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}$ и $b=\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}$ се цели и нивната разлика е поголема од 1. Докажи дека $b=a+2$ и $x=y=\frac{5}{4}$.

Решение. Бидејќи $\sqrt{t+1}-\sqrt{t-1}=\frac{2}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}}\leq\sqrt{2}$, за $t\geq 1$, добиваме

$$\begin{aligned} b-a&=\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}-(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1})\\ &=(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})+(\sqrt{y+1}-\sqrt{y-1})\\ &\leq 2\sqrt{2}<3. \end{aligned}$$

Според тоа, $1<b-a<3$, од каде следува $b-a=2$. Така го добиваме системот

$$\begin{cases}\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}=a\\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=a+2.\end{cases}$$

Воведуваме замена $u=\sqrt{x-1}\geq 0$ и $v=\sqrt{y-1}\geq 0$ и системот го добива видот

$$\begin{cases}u+v=a\\ \sqrt{u^2+2}+\sqrt{v^2+2}=a+2\end{cases},$$

каде $u,v\in[0,a]$. Во втората равенка заменуваме $u=v-a$ и истата ја запишуваме во обликот

$$\sqrt{a^2+v^2-2av+2}=a+2-\sqrt{v^2+2}\,.$$

По квадрирањето и средувањето ја добиваме равенката

$$(a+2)\sqrt{v^2+2}=2(a+1)+av\,.$$

Повторно квадрираме и ја добиваме равенката

$$f(v)=2(a+1)v^2-2a(a+1)v+2-a^2=0\,.$$

Нека претпоставиме дека $a\geq 2$. Тогаш $f(0)=f(a)=2-a^2<0$. Тоа значи дека корените на $f(v)=0$ се надвор од интервалот $[0,a]$, што е противречност. Значи, $a=1$ и од $4v^2-4x+1=0$ следува $v=\frac{1}{2}$, па затоа $u=\frac{1}{2}$. Конечно, од $\frac{1}{2}=\sqrt{x-1}$ и $\frac{1}{2}=\sqrt{y-1}$, следува $x=y=\frac{5}{4}$.

3. Ако за $\triangle ABC$ важи

$$(\sin\tfrac{\alpha}{2})^{23}(\cos\tfrac{\beta}{2})^{48}=(\sin\tfrac{\beta}{2})^{23}(\cos\tfrac{\alpha}{2})^{48}\,,$$

каде α и β се аглите при темињата A и B, соодветно, пресметај го односот $\overline{AC}:\overline{BC}$.

Решение. Ќе докажеме дека $\alpha=\beta$, т.е. $\overline{AC}:\overline{BC}=1$. Нека претпоставиме, дека $\alpha<\beta$. Тогаш $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$. Бидејќи $\sin x$ и $\cos x$ се соодветно растечка и опаѓачка функција на интервалот $[0,\frac{\pi}{2}]$, добиваме дека важи

$$0<\sin\tfrac{\alpha}{2}<\sin\tfrac{\beta}{2} \text{ и } 0<\cos\tfrac{\beta}{2}<\cos\tfrac{\alpha}{2}\,.$$

Според тоа,

$$0<(\sin\tfrac{\alpha}{2})^{23}<(\sin\tfrac{\beta}{2})^{23} \text{ и } 0<(\cos\tfrac{\beta}{2})^{48}<(\cos\tfrac{\alpha}{2})^{48}\,.\,.$$

Ако ги помножиме последните неравенства, добиваме

$$(\sin\tfrac{\alpha}{2})^{23}(\cos\tfrac{\beta}{2})^{48}<(\sin\tfrac{\beta}{2})^{23}(\cos\tfrac{\alpha}{2})^{48}\,,$$

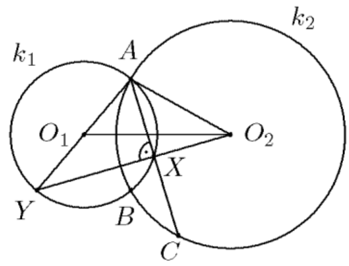
што противречи на условот на задачата. Случајот $\alpha>\beta$ се разгледува аналогно. Според тоа, $\alpha=\beta$, т.е. $\overline{AC}:\overline{BC}=1$.

4. Две кружници k_1 и k_2 соодветно со центри O_1 и O_2 и радиуси 1 и $\sqrt{2}$ се сечат во точките A и B, при што $\overline{O_2O_1}=2$. Нека AC е тетива во k_2 чија средина лежи на k_1. Определи ја должината на AC.

Решение. *Прв начин*. Средината на AC да ја означиме со X, а пресечната точка на O_2X и k_1 со Y. Тогаш $O_2X\perp AC$ и затоа AY е дијаметар на k_1, т.е. $O_1\in AY$. Значи, O_2O_1 е тежишна линија во $\triangle YO_2A$, па затоа

$16=4\overline{O_1O_2}^2=2\overline{O_2A}^2+2\overline{O_2Y}^2-\overline{YA}^2=2\overline{O_2Y}^2$,

т.е. $\overline{O_2Y}=2\sqrt{2}$. Останува да ја пресметаме висината во $\triangle YO_2A$. Бидејќи



$$\cos\measuredangle YAO_2=\frac{2^2+\sqrt{2}^2-(2\sqrt{2})^2}{2\cdot 2\cdot\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4},$$

добиваме

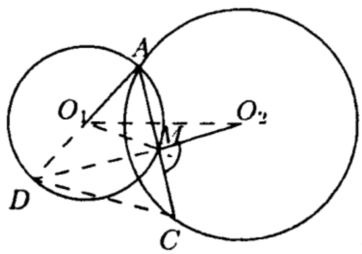
$$\sin\measuredangle YAO_2=\sqrt{1-\cos^2\measuredangle YO_2A}=\frac{\sqrt{14}}{4}.$$

Сега, од равенството

$$2P_{YAO_2}=\overline{AY}\cdot\overline{AO_2}\sin\measuredangle YAO_2=\overline{AX}\cdot\overline{YO_2}$$

добиваме $\overline{AX}=\frac{\sqrt{14}}{4}$, па затоа $\overline{AC}=2\overline{AX}=\frac{\sqrt{14}}{2}$.

Втор начин. Нека M е средината на AC и D е дијаметрално спротивната точка на A во однос на O_1. Тогаш O_1M е средна линија во $\triangle DCA$ и $\overline{DC}=2\cdot\overline{O_1M}=2$. Од друга страна O_2O_1 е тежишна линија во $\triangle DO_2A$ и од формулата за тежишналинија имаме



$$\overline{O_1O_2}^2=\tfrac{1}{4}(2\overline{O_2A}^2+2\overline{O_2D}^2-\overline{DA}^2)=2\overline{O_2D}^2.$$

Значи, $\overline{O_2D}=2\sqrt{2}$. Понатаму ќе користиме дека $O_2M\perp AC$ и дека $\triangle DMA$ е правоаголен, т.е. точките D,M и O_2 се колинеарни. Нека $\overline{AM}=x$. Од $\triangle DMA$ имаме $\overline{DM}=\sqrt{4-x^2}$, а од $\triangle MO_2A$ следува $\overline{MO_2}=\sqrt{2-x^2}$. Значи,

$$2\sqrt{2}=\overline{O_2D}=\overline{DM}+\overline{MO_2}=\sqrt{4-x^2}+\sqrt{2-x^2}.$$

Равенката $2\sqrt{2}=\sqrt{4-x^2}+\sqrt{2-x^2}$ има единствен корен $x=\frac{\sqrt{14}}{2}$, па затоа $\overline{AC}=\frac{\sqrt{14}}{2}$.

Трет начин. Ќе ги користиме истите ознаки како при вториот начин на решавање. Нека $\measuredangle O_1MA=\alpha$. Од рамностраниот $\triangle O_1MA$ имаме $\cos\alpha=\frac{x}{2}$, па значи $\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$, бидејќи $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$. Од друга страна, од косинусната теорема за $\triangle O_1O_2M$ имаме $\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})=-\frac{1+x^2}{2\sqrt{2-x^2}}$, т.е. $\sin\alpha=\frac{1+x^2}{2\sqrt{2-x^2}}$. Така, ја добиваме равенката $\frac{1+x^2}{2\sqrt{2-x^2}}=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$, чие решение е $x=\frac{\sqrt{14}}{2}$, па затоа $\overline{AC}=\frac{\sqrt{14}}{2}$.