

Регионален натпревар 2022

I година

1A. Марин, Максим, Матеј и Марјан се четири браќа. Мајка им ги за-текнула како ги изеле сите кифлички што ги испекла. На нејзиното пра-шање „Кој ги изеде кифличките?“, тие ги дале следните изјави:

Марин: „Сите јадевме од кифличките.“

Максим: „Јас и Марин заедно изедовме исто толку кифлички колку и Матеј и Марјан заедно.“

Матеј: „Марјан изеде повеќе кифлички од мене.“

Марјан: „Но, јас и Марин заедно изедовме помалку од Максим и Матеј заедно.“

Мајка им знае дека сите четворица ја зборуваат вистината. Кој изел најмногу кифлички?

Решение. *Прв начин.* Нека Марин, Максим, Матеј и Марјан изеле a, b, c, d кифлички соодветно. Тогаш, изјавите кои ги дале се:

Марин: „ $a, b, c, d > 0$ “,

Максим: „ $a + b = c + d$ “,

Матеј: „ $d > c$ “,

Марјан: „ $a + d < b + c$ “.

Од $a + b = c + d$ и $a + d < b + c$ имаме

$$(a + b) + (a + d) < (c + d) + (b + c), \text{ т.е. } 2a + b + d < b + 2c + d,$$

односно $2a < 2c$, од каде $a < c$. Од $a + b = c + d$ и $a + d < b + c$ имаме

$$(c + d) + (a + d) < (a + b) + (b + c), \text{ т.е. } a + c + 2d < a + 2b + c,$$

односно $2d < 2b$, од каде $d < b$.

Сега, од $a < c$, $d < b$ и $d > c$ имаме дека $a < c < d < b$, односно Максим изел најмногу кифлички.

Втор начин. Од изјавата на Матеј заклучуваме дека Матеј не е тој кој изел најмногу кифлички, затоа што Марјан изел повеќе од него. Да прет-поставиме дека Марјан изел најмногу кифлички. Значи, Марјан изел по-веќе или исто толку кифлички колку и Максим, односно Максим изел помалку или исто толку колку и Марјан. Од изјавата на Максим заклу-чуваме дека Матеј изел помалку или исто толку кифлички колку и Марин, за да Марин и Максим заедно имаат изедено еднаков број кифлички како и Матеј и Марјан заедно. Па тогаш, Максим и Матеј заедно имаат изедено помалку или исто толку кифлички колку и Марјан и Марин заедно, што

противречи на изјавата на Марјан, па не може Марјан да изел најмногу кифлички.

Да претпоставиме дека Марин изел најмногу кифлички. Тогаш, Марин изел повеќе или исто толку кифлички колку и Матеј. Од изјавата на Максим заклучуваме дека Марјан морал да изеде повеќе или исто толку кифлички колку и Максим. Но, тогаш Марјан и Марин заедно ќе имаат изедено повеќе или исто толку кифлички колку и Матеј и Максим заедно, што противречи на изјавата на Марјан, па не може Марин да изел најмногу кифлички.

Заклучуваме дека Максим е тој кој изел најмногу кифлички.

1Б. Александар, Бојан, Васил и Горан играле игри со џамлии. Одиграле вкупно четири игри и секој од нив победил во точно една игра, при што победувале во редослед како погоре дадениот. На крајот од секоја игра и пред почетокот на наредната игра, победникот во последната одиграна игра му дава на секој друг играч во играта, онолку џамлии колку што играчот има во тој момент во себе. После сите одиграни игри, секој од играчите имал по точно 48 џамлии. Колку џамлии имал секој играч пред почетокот на првата играта?

Решение. *Прв начин.* После сите одиграни игри, секој од играчите имал точно 48 џамлии. Значи (48,48,48,48) се бројот на џамлии после сите одиграни игри на Александар, Бојан, Васил и Горан, соодветно. Победник во четвртата игра бил Горан, што значи дека тој ги зголемил два пати џамлиите на останатите играчи, па пред почетокот на четвртата игра играчите имале

$$48: 2 = 24, 48: 2 = 24, 48: 2 = 24 \text{ и } 48 + 24 + 24 + 24 = 120$$

џамлии соодветно, т.е. (24,24,24,120). Победник во третата игра бил Васил, што значи дека тој ги зголемил два пати џамлиите на останатите играчи, па пред почетокот на третата игра играчите имале

$$24: 2 = 12, 24: 2 = 12, 24 + 12 + 12 + 60 = 108 \text{ и } 120 : 2 = 60$$

џамлии соодветно, т.е. (12,12,108,60). Победник во втората игра бил Бојан, што значи дека тој ги зголемил два пати џамлиите на останатите играчи, па пред почетокот на втората игра играчите имале

$$12 : 2 = 6, 12 + 6 + 54 + 30 = 102, 108: 2 = 54 \text{ и } 60 : 2 = 30$$

џамлии соодветно т.е. (6,102,54,30). Победник во првата игра бил Александар, што значи дека тој ги зголемил два пати џамлиите на останатите играчи, па пред почетокот на првата игра играчите имале

$$6 + 51 + 27 + 15 = 99, 102 : 2 = 51, 54 : 2 = 27 \text{ и } 30: 2 = 15$$

џамлии соодветно, т.е. (99,51,27,15).

Па, пред почетокот на првата игра Александар имал 99, Бојан имал 51, Васил имал 27 и Горан имал 15 џамлии.

Втор начин. Нека a, b, v, g се бројот на џамлии пред почетокот на играта на Александар, Бојан, Васил и Горан, соодветно.

Во првата игра победник е Александар, па пред почетокот на втората игра Александар имал $a-b-v-g$, Бојан имал $2b$, Васил имал $2v$ и Горан имал $2g$ џамлии.

Во втората игра победник е Бојан, па пред почетокот на третата игра Александар имал $2(a-b-v-g)$, Бојан имал

$$2b-(a-b-v-g)-2v-2g=3b-a-v-g,$$

Васил имал $4v$ и Горан имал $4g$ џамлии.

Во третата игра победник е Васил, па пред почетокот на четвртата игра Александар имал $4(a-b-v-g)$, Бојан имал $2(3b-a-v-g)$, Васил имал

$$4v-2(a-b-v-g)-(3b-a-v-g)-4g=7v-a-b-g$$

и Горан имал $8g$ џамлии.

Во четвртата игра победник е Горан, па после сите одиграни игри Александар имал $8(a-b-v-g)$, Бојан имал $4(3b-a-v-g)$, Васил имал $2(7v-a-b-g)$ и Горан имал

$$8g-4(a-b-v-g)-2(3b-a-v-g)-(7v-a-b-g)=15g-a-b-v$$

џамлии.

Од тоа што после сите одиграни игри сите имале по точно 48 џамлии, добиваме

$$\begin{cases} 8(a-b-v-g)=48, \\ 4(3b-a-v-g)=48, \\ 2(7v-a-b-g)=48, \\ 15g-a-b-v=48, \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} a-b-v-g=6, \\ 3b-a-v-g=12, \\ 7v-a-b-g=24, \\ 15g-a-b-v=48. \end{cases}$$

Исто така, имаме дека вкупниот број џамлии е $4 \cdot 48=192$, односно имаме

$$a+b+v+g=192.$$

Решавајќи го системот од последните пет равенки добиваме $a=99$, $b=51$, $v=27$ и $g=15$. Значи, Александар имал 99 џамлии, Бојан имал 51 џамлија, Васил имал 27 џамлии и Горан имал 15 џамлии пред почетокот на првата играта.

2АБ. Даден е системот линеарни равенки

$$\begin{cases} (a+3)x - 2(a+3)y = 12 - 3a \\ (a+3)x + (a+3)y = -1 - a \end{cases}$$

каде што $a \neq -3$ е параметар кој не зависи од x и y . Одреди ги сите целобројни вредности на параметарот a за кои решенијата на системот се негативни броеви.

Решение. Со одземање на првата одвтората равенка на системот добиваме $3(a+3)y = -13 + 2a$, па затоа $y = \frac{-13+2a}{3(a+3)}$. Сега, со замена во првата равенка на системот добиваме $x = \frac{10-5a}{3(a+3)}$. Решенијата на системот треба да се негативни броеви, од што го добиваме системот неравенки

$$\begin{cases} \frac{10-5a}{3(a+3)} < 0, \\ \frac{-13+2a}{3(a+3)} < 0. \end{cases} \quad (*)$$

Последниот систем е еквивалентен со вкупноста од системите неравенки

$$(1) \quad \begin{cases} 10-5a > 0, \\ 3(a+3) < 0, \\ -13+2a > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad (2) \quad \begin{cases} 10-5a < 0, \\ 3(a+3) > 0, \\ -13+2a < 0 \end{cases}$$

Множеството решенија на системот (1) е $M_1 = \emptyset$, а множеството решенија на системот (2) е $M_2 = (2, \frac{13}{2})$. Според тоа, решение на системот неравенки е $M_1 \cup M_2 = (2, \frac{13}{2})$. Целобројни вредности кои припаѓаат на интервалот $(2, \frac{13}{2})$ се 3, 4, 5 и 6. Значи, $a \in \{3, 4, 5, 6\}$.

3А. Определи ги сите парови природни броеви (x, y) такви што x и y се заемно прости и важи

$$x^2 + 2y^2 + 334 = \text{NZS}(x^2, y^2).$$

Решение. Од x и y се заемно прости следува

$$\text{NZD}(x^2, y^2) = \text{NZD}(x, y) = 1,$$

па затоа $x^2 y^2 = \text{NZS}(x^2, y^2) \text{NZD}(x^2, y^2) = \text{NZS}(x^2, y^2)$. Според тоа дадената равенка го добива видот $x^2 + 2y^2 + 334 = x^2 y^2$ и истата ја трансформираме во равенката $y^2 = 1 + \frac{336}{x^2 - 2}$. Бидејќи y^2 е природен број, мора да е $x^2 - 2$ делител на бројот $336 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7$. Оттука добиваме

$$x^2 - 2 \in \{1, 2, 4, 8, 16, 3, 6, 12, 24, 46, 7, 14, 28, 56, 112, 21, 42, 84, 168, 336\},$$

па затоа

$$x^2 \in \{3, 4, 6, 10, 18, 5, 8, 14, 26, 48, 9, 16, 30, 58, 114, 23, 44, 86, 170, 338\}.$$

Во горното множество единствени квадрати на природен број се 4, 9 и 16, па затоа $x = 2, 3, 4$. Притоа:

- ако $x = 2$, тогаш $y^2 = 1 + \frac{336}{2^2 - 2} = 169$, т.е. $y = 13$,
- ако $x = 3$, тогаш $y^2 = 1 + \frac{336}{3^2 - 2} = 49$, т.е. $y = 7$,
- ако $x = 4$, тогаш $y^2 = 1 + \frac{336}{4^2 - 2} = 25$, т.е. $x = 5$.

3Б. Определи ги сите природни броеви x такви што $x^3 - x + p = 507$, каде p е прост број.

Решение. Дадената равенка ја запишуваме во облик

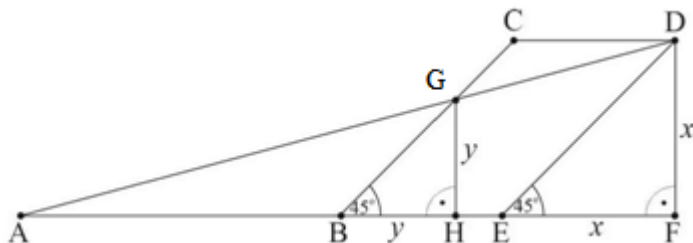
$$x(x-1)(x+1) + p = 507.$$

Собирокот $x(x-1)(x+1)$ е производ на три последователни природни броја, па затоа е делив со 3. Исто така и 507 е делив со 3, па следува дека мора и p да е делив со 3. Единствен прост број што е делив со 3 е $p = 3$. Сега равенката гласи $x(x-1)(x+1) = 504$, односно $x(x-1)(x+1) = 7 \cdot 8 \cdot 9$, па затоа $x = 8$.

4АБ. За да стаса од дома до најблиската продавница, Кристијан се движи по обележана патека: оди 200 метри на исток, потоа 150 метри на северо-исток и уште 100 метри на исток (насоката северо-исток е одредена со симетралата на аголот формиран од насоките север и исток). Кристијан сакал да го скрати својот пат и почнал да се движи низ паркот по права линија, директно од неговиот дом кон продавницата. Точно кога ја пресретнал обележаната патека, сретнал еден дедо, се засрашил од неговиот прекорен поглед, па одлучил да продолжи да оди по обележаната патека до продавницата. За колку Кристијан го скратил патот од дома до продавницата?

Решение. Нека $\overline{AB} = 200\text{ m}$, $\overline{BC} = 150\text{ m}$ и $\overline{CD} = 100\text{ m}$ се деловите од вообичаената патека од домот на Кристијан до продавницата. Тогаш $\angle ABC = \angle BCD = 135^\circ$ и $AB \parallel CD$. Нека E е точка на правата AB таква што $DE \parallel CB$ и F е точка на правата AB таква што $DF \perp AB$. Тогаш че-

триаголникот $BEDC$ е паралелограм и $\angle FED = \angle EBC = 45^\circ$ па триаголникот DFE е рамнокрак правоаголен со хипотенуза $\overline{ED} = \overline{BC} = 150\text{ m}$. Од Питагоровата теорема применета на триаголникот DFE следува $\overline{EF}^2 + \overline{DF}^2 = \overline{ED}^2$. Потоа од $\overline{EF} = \overline{DF} = x$ добиваме $x^2 + x^2 = 150^2$, па затоа $\overline{EF} = \overline{DF} = x = \frac{150}{\sqrt{2}} = 75\sqrt{2}\text{ m}$.



Нека G е пресечната точка на AD и BC . Треба да ја пресметаме разликата на должината на искршената линија формирана од отсечките AB и BG и должината на отсечката AG . Нека H е точка на правата AB таква што $EH \perp AB$. Тогаш триаголникот BHG е рамнокрак правоаголен со краци $\overline{BH} = \overline{CG} = y$. Од сличноста $\triangle AHG \sim \triangle AFD$ имаме

$$\overline{AH} : \overline{HG} = \overline{AF} : \overline{FD}, \text{ т.е. } (200 + y) : y = (200 + 100 + 75\sqrt{2}) : 75\sqrt{2},$$

па затоа $y = 50\sqrt{2}\text{ cm}$. Од Питагоровата теорема за триаголникот BHG следува

$$\overline{BG}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{GH}^2 = (50\sqrt{2})^2 + (50\sqrt{2})^2 = 10000,$$

па затоа $\overline{BG} = 100\text{ m}$. Понатаму, од Питагоровата теорема за триаголникот AHG имаме

$$\overline{AG}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{GH}^2 = (200 + 50\sqrt{2})^2 + (50\sqrt{2})^2 = 50000 + 20000\sqrt{2},$$

па затоа $\overline{AG} = 100\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$. Конечно, Кристијан својот пат го скратил за

$$200 + 100 - 100\sqrt{5 + 2\sqrt{2}} = 100(3 - \sqrt{5 + 2\sqrt{2}})\text{ m}.$$

II година

1A. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x\sqrt{x} + 27y\sqrt{x} = 36 \\ 27y\sqrt{y} + 9x\sqrt{y} = 28. \end{cases}$$

Решение. Со собирање и одземање на равенките на системот се добива еквивалентниот систем

$$\begin{cases} x\sqrt{x} + 27y\sqrt{x} + 27y\sqrt{y} + 9x\sqrt{y} = 64 \\ 27y\sqrt{y} + 9x\sqrt{y} - x\sqrt{x} + 27y\sqrt{x} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x} + 3\sqrt{y})^3 = 64 \\ (\sqrt{x} - 3\sqrt{y})^3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 4 \\ \sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 6 \\ \sqrt{y} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 36 \\ y = \frac{1}{9} \end{cases}$$

1Б. Ако за ненулните реални броеви a, b и c важат равенствата $a^2 + a = b^2$, $b^2 + b = c^2$ и $c^2 + c = a^2$, одреди ја вредноста на изразот $(a-b)(b-c)(c-a)$.

Решение. Со собирање на трите равенства добиваме

$$a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c = a^2 + b^2 + c^2, \text{ т.е. } a + b + c = 0.$$

Според тоа, $a + b = -c$, $b + c = -a$, $c + a = -b$. Од равенството $a^2 + a = b^2$ следува $(a-b)(a+b) = -a$, па како $a + b = -c \neq 0$, добиваме $a - b = -\frac{a}{a+b}$.

Аналогно $b - c = -\frac{b}{b+c}$ и $c - a = -\frac{c}{c+a}$. Според тоа,

$$(a-b)(b-c)(c-a) = \frac{-a}{a+b} \cdot \frac{-b}{b+c} \cdot \frac{-c}{c+a} = \frac{-a}{-c} \cdot \frac{-b}{-a} \cdot \frac{-c}{-b} = 1.$$

2АБ. Докажи дека за секои реални броеви a, b и c , равенката

$$3(a+b+c)x^2 + 4(ab+bc+ca)x + 4abc = 0$$

има реални решенија. При кои услови решенијата на равенката се еднакви меѓу себе?

Решение. За дискриминантата на квадратната равенка имаме:

$$\begin{aligned} D &= 16(ab+bc+ca)^2 - 48abc(a+b+c) \\ &= 16(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - ab^2c - a^2bc - abc^2) \\ &= 8(2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - 2ab^2c - 2a^2bc - 2abc^2) \\ &= 8((ab-bc)^2 + (bc-ca)^2 + (ca-ab)^2) \geq 0. \end{aligned}$$

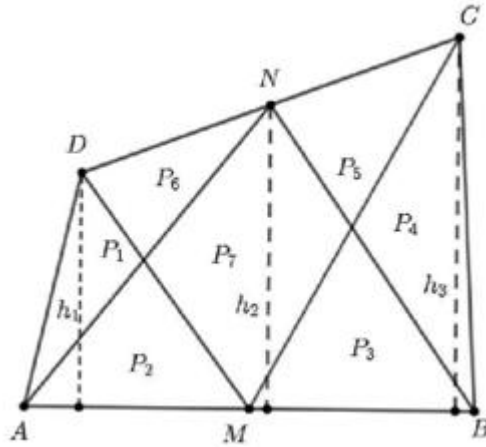
Значи дискриминантата е ненегативен реален број, па квадратната равенка ќе има реални решенија за секои реални броеви a, b, c . Равенката ќе има двоен корен ако и само ако $D = 0$, т.е. ако и само ако

$$ab - bc = 0, bc - ca = 0, ca - ab = 0, \text{ т.е. ако и само ако } ab = bc = ca.$$

ЗА. Нека M и N се средини на страните AB и CD на конвексниот четириаголник $ABCD$. Докажи дека

$$P_{\triangle ABN} + P_{\triangle CDM} = P_{\square ABCD}.$$

Решение. Отсечките AN , BN , CM и DM го делат четириаголникот на шест триаголници со плоштини $P_1, P_2, \dots, P_6$, и еден четириаголник со плоштина P_7 (види цртеж). Нека висината на триаголникот AMD спуштена кон AM е h_1 , висината на триаголникот ABN спуштена кон AB е h_2 и висината на триаголникот MBC спуштена кон MB е h_3 . Тогаш добиваме траpez со основи h_1 и h_3 и средна линија h_2 , па затоа $h_2 = \frac{h_1 + h_3}{2}$. Имаме



$$\begin{aligned} P_{\triangle ABN} &= P_2 + P_3 + P_7 = \frac{\overline{AB} \cdot h_2}{2} \\ &= \frac{\overline{AB} \cdot \frac{h_1 + h_3}{2}}{2} = \frac{\overline{AB} \cdot h_1}{2} + \frac{\overline{AB} \cdot h_3}{2} \\ &= \frac{\overline{AM} \cdot h_1}{2} + \frac{\overline{MB} \cdot h_3}{2} = P_{\triangle AMD} + P_{\triangle MBC} \\ &= P_1 + P_2 + P_3 + P_4. \end{aligned}$$

Според тоа,

$$P_{\triangle ABN} + P_{\triangle CDM} = (P_1 + P_2 + P_3 + P_4) + (P_5 + P_6 + P_7) = P_{\square ABCD},$$

што и требаше да се докаже.

ЗБ. Симетралата на аголот ABC и симетралата на аголот BCD во траpez $ABCD$, се сечат во точка M на кракот AD на траpezот. Пресметај ја плоштината на траpezот $ABCD$, ако се познати $\overline{MB} = p$, $\overline{MC} = q$ и висината на траpezот h (h е растојанието меѓу основите AB и CD на траpezот).

Решение. Нека $\angle ABM = \varphi$, $\angle DCM = \psi$, т.е. $\angle ABC = 2\varphi$, $\angle BCD = 2\psi$.

Тогаш од $2\varphi + 2\psi = 180^\circ$ следува дека

$\varphi + \psi = 90^\circ$, па затоа триаголникот BCM

е правоаголен и имаме $\overline{BC} = \sqrt{p^2 + q^2}$.

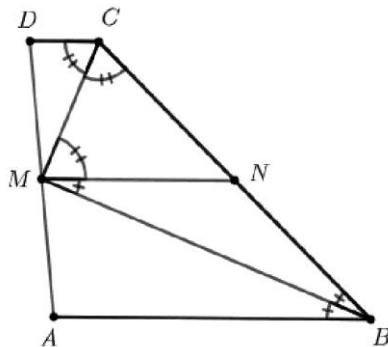
Нека N е средина на BC , тогаш

$\overline{NM} = \overline{NC} = \overline{NB}$. Сега $\angle CMN = \angle MCN$

и оттука $\angle CMN = \angle MCD$, па затоа

$MN \parallel DC \parallel AB$. Бидејќи N е средина на

BC , следува M е средина на AD . Јасно,



MN е средна линија во трапезот и оттука $P = \overline{MN} \cdot h = \frac{\overline{BC}}{2} \cdot h = \frac{h\sqrt{p^2 + q^2}}{2}$.

4АБ. Најди ги сите прости броеви p за кои системот

$$\begin{cases} p + 49 = 2x^2 \\ p^2 + 49 = 2y^2 \end{cases}$$

има решение во множеството природни броеви

Решение. Десните страни на двете равенки се парни броеви, па затоа p мора да е непарен број, т.е. $p \neq 2$. Од условот на задачата следува

$$2y^2 = p^2 + 49 > p + 49 = 2x^2,$$

па затоа $y > x$. Понатаму,

$$(p+7)^2 > p^2 + 49 = 2y^2 > y^2,$$

па затоа $p+7 > y$, т.е. $p \geq y-6$. Нека $p > y > x$. Ако од втората равенка ја

одземеме првата, добиваме $p^2 - p = 2y^2 - 2x^2$, т.е.

$$p(p-1) = 2(y-x)(y+x).$$

Бидејќи p не е делител на 2, следува дека p е делител на $(y-x)(y+x)$, а

од $p > y > x$ следува дека $y-x < p$ и $y+x < 2p$. Затоа p е делител на

$y+x$ и важи $y+x = p$. Последното значи дека $p-1 = 2(y-x)$, т.е.

$p = 2(y-x) + 1$. Според тоа, $y+x = 2(y-x) + 1$, од каде следува $y = 3x-1$,

односно $p = 4x-1$. Со замена во првата равенка добиваме $4x+48 = 2x^2$,

од каде наоѓаме $x_{1/2} = 1 \pm 5$, па решение во множеството природни

броеви е $x = 6$. Тогаш $y = 17$ и $p = 23$.

Значи, за $p=23$ решение на дадениот систем е $(x, y)=(6, 17)$.

Да ги разгледаме случаите $y-6 \leq p \leq y$, т.е. $p=y-t$, $y=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Заменуваме во втората равенка на системот и добиваме $(y-t)^2 + 49 = 2y^2$ и оттука наоѓаме $y^2 + 2ty - t^2 - 49 = 0$. Дискриминантата на последната равенка е $D = 4(2t^2 + 49)$. Тогаш со замена за $t=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ добиваме дека дискриминантата е квадрат на природен број за $t=0, 4, 6$ (решаваме во множеството природни броеви). За $t=0$ добиваме $y=p=7$ и тогаш $x^2=28$, па во овој случај задачата нема решение. За $t=4$ добиваме $y_{1/2} = -4 \pm 9$, па е $y=5$ и $p=1$ не е прост број. За $t=6$ добиваме $y_{1/2} = -6 \pm 11$, па е $y=5$ и $p=1$ не е прост број.

Значи, единствено решение на задачата е $p=23$ и тогаш $(x, y)=(6, 17)$.

III година

1AB. Најди ги сите вредности на параметарот a , за кои што множеството решенија на неравенката $6x^2 + 4a^2 + 6ax - 3x - 24a + 35 < 0$ содржи барем еден цел број.

Решение. Ја средуваме неравенката како неравенка по параметарот a , во облик

$$4a^2 + (6x - 24)a + 6x^2 - 3x + 35 < 0. \quad (1)$$

За да постои вредност на параметарот a , која ја задоволува неравенката (параболата е отворена нагоре), потребен и доволен услов е дискриминантата на квадратната равенка (1) да е позитивна, односно параболата да има две пресечни точки со x -оската. Значи,

$$D = (6x - 24)^2 - 4 \cdot 4(6x^2 - 3x + 35) = -15x^2 - 60x + 4 > 0,$$

односно $15x^2 + 60x - 4 < 0$. Оттука добиваме $x \in (-\frac{8\sqrt{15}}{15} - 2, \frac{8\sqrt{15}}{15} - 2)$. Во овој интервал целобројни вредности за променливата се: $x = -4, -3, -2, -1, 0$. За секоја од овие вредности на x ќе ги најдеме соодветните вредности за параметарот a .

Неравенката по параметарот a , за

- $x = -4$ добива вид $4a^2 - 48a + 143 < 0$, па имаме $a \in (\frac{11}{2}, \frac{13}{2})$,
- $x = -3$ добива вид $2a^2 - 21a + 49 < 0$, па имаме $a \in (\frac{7}{2}, 7)$,

- $x = -2$ добива вид $4a^2 - 36a + 65 < 0$, па имаме $a \in (\frac{5}{2}, \frac{13}{2})$,
- $x = -1$ добива вид $2a^2 - 15a + 22 < 0$, па имаме $a \in (2, \frac{11}{2})$,
- $x = 0$ добива вид $4a^2 - 24a + 35 < 0$, па имаме $a \in (\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$.

Унијата на сите добиени интервали ни ги одредува бараните вредности на параметарот $a \in (2, 7)$.

2А. Познато е дека $a^x = b^y = c^z = 30^w$ и $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{w}$, каде a, b, c се природни броеви, а x, y, z, w се реални броеви. Определи го збирот $a + b + c$.

Решение. Да забележиме дека ниту еден од броевите a, b, c не може да е 1. Ако било кој од броевите a, b или c прима вредност 1, тогаш $30^w = 1$, од каде $w = 0$, што не е можно затоа што по условот на задачата x, y, z, w се ненулти реални броеви. Сега $a, b, c > 1$, па со логаритмирање на равенството $a^x = b^y = c^z = 30^w$ добиваме

$$x = w \log_a 30, y = w \log_b 30, z = w \log_c 30.$$

Од равенството $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{w}$ следува

$$\frac{1}{w \log_a 30} + \frac{1}{w \log_b 30} + \frac{1}{w \log_c 30} = \frac{1}{w},$$

односно $\log_{30} a + \log_{30} b + \log_{30} c = 1$. Според тоа, $\log_{30} abc = 1$, па затоа $abc = 30$. Бидејќи a, b, c се природни броеви поголеми од 1, за производот имаме $abc = 2 \cdot 3 \cdot 5$, па затоа броевите a, b, c се 2, 3, 5 (во некој редослед), што значи $a + b + c = 2 + 3 + 5 = 10$.

2Б. Определи го количникот на броевите

$$2021^{\sqrt{\log_{2021} 2022}} \text{ и } 2022^{\sqrt{\log_{2022} 2021}}.$$

Решение. Да означиме $2021^{\sqrt{\log_{2021} 2022}} = x$ и $2022^{\sqrt{\log_{2022} 2021}} = y$.
Имаме,

$$\log x = \sqrt{\log_{2021} 2022} \cdot \log 2021 = \sqrt{\frac{\log 2022}{\log 2021}} \cdot \log 2021 = \sqrt{\log 2022 \cdot \log 2021}$$

и

$$\log y = \sqrt{\log_{2022} 2021} \cdot \log 2022 = \sqrt{\frac{\log 2021}{\log 2022}} \cdot \log 2022 = \sqrt{\log 2021 \cdot \log 2022}.$$

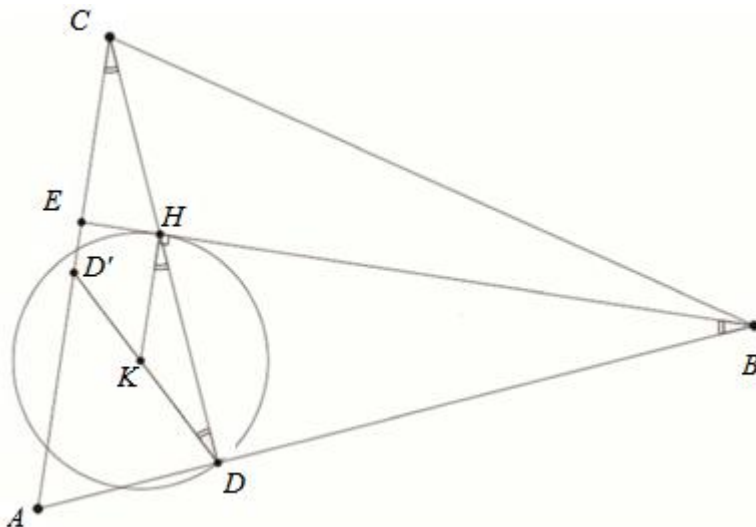
Според тоа, $\log x = \log y$, па затоа $x = y$, т.е. бараниот количник е $\frac{x}{y} = 1$.

3А. Во триаголник ABC , CD е висината во триаголникот спуштена од темето од C и точката H е ортоцентарот на триаголникот. Нека точката K е центар на кружница која што минува низ точката D и нека правата BH е тангентата на кружницата со допирна точка H . Докажи дека правата DK ја преполовува страната AC .

Решение. Нека $D' = DK \cap AC$. Нека E е подножната точка на висината спуштена од темето B (види цртеж). Јасно е дека $\angle BHK = 90^\circ$. Понатаму, триаголниците ADC и AEB се правоаголници, па важи

$$\angle ACD = 180^\circ - (90^\circ + \angle CAD) = 90^\circ - \angle CAD = \angle ABE$$

(или како агли со заемно нормални краци). Сега



$$\angle DBH = 90^\circ - \angle DHB = \angle BHK - \angle DHB = \angle DHK.$$

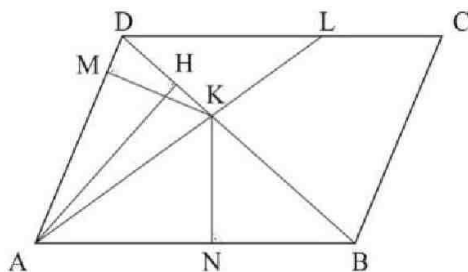
Триаголникот KDH е рамнокрак, па затоа $\angle KDH = \angle KHD$. Оттука $\angle KDH = \angle KHD = \angle ABE = \angle ACD$, па добиваме дека триаголникот $AD'D$ е рамнокрак и $\overline{CD'} = \overline{DD'}$. Триаголникот ADC е правоаголен со прав агол во темето D , па според Талесовата теорема, постои кружница со дијаметар AC на која лежи темето D . Од $\overline{CD'} = \overline{DD'}$, каде $D' \in AC$, јасно е дека точката D' е центарот на таа кружница и тогаш важи $\overline{AD'} = \overline{DD'}$. Со тоа докажавме дека правата DK ја преполовува страната AC .

3Б. Даден е паралелограм $ABCD$. Симетралата на $\angle DAB$ ја сече страната DC во точка L , а дијагоналата BD во точка K , таква што $\overline{DK} : \overline{KB} = 3:4$. Пресметај ја должината на отсечката LC , ако периметарот на паралелограмот е 28.

Решение. AL е симетрала на $\angle DAB$ па важи

$$\angle DAL = \angle LAB = \angle ALD$$

(последните два агли се еднакви како наизменични агли при трансверзала AL), од каде $\triangle ALD$ е рамнокрак. Да означиме $\overline{DL} = \overline{AD} = b$ и $\overline{AB} = \overline{DC} = a$. За плоштините на триаголниците на цртежот имаме



$$P_{\triangle AKD} : P_{\triangle ABK} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{MK}}{2} : \frac{\overline{AB} \cdot \overline{NK}}{2} = b : a,$$

каде MK, NK се соодветните висини спуштени кон страните и за нив важи $\overline{MK} = \overline{NK}$ затоа што точката K , како точка од симетралата на $\angle DAB$ е подеднакво оддалечена од краците на аголот. Од друга страна,

$$P_{\triangle AKD} : P_{\triangle ABK} = \frac{\overline{DK} \cdot \overline{AH}}{2} : \frac{\overline{BK} \cdot \overline{AH}}{2} = \overline{DK} : \overline{BK} = 3:4.$$

Сега, изедначувајќи ги односите на плоштините добиваме дека важи $b:a=3:4$, а од периметарот на паралелограмот $2(a+b)=28$, со замена, имаме $b=6, a=8$. Конечно, $\overline{LC} = a-b=2$.

4АБ. Одреди ја максималната вредност на изразот

$$y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right), \quad x \in \left[-\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{3}\right].$$

Решение. Означуваме $z = -(x + \frac{\pi}{6})$, при што $z \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ и $2z \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$.

Функцијата $\operatorname{tg} x$ е непарна, а функцијата $\cos x$ е парна. Имаме:

$$-\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{tg}\left(-(x + \frac{\pi}{6})\right) = \operatorname{tg} z \quad \text{и} \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-(x + \frac{\pi}{6})\right) = \cos z.$$

Понатаму,

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \operatorname{ctg}\left(-x - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{ctg} z.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{ctg} z + \operatorname{tg} z + \cos z = \frac{\cos z}{\sin z} + \frac{\sin z}{\cos z} + \cos z \\ &= \frac{\sin^2 z + \cos^2 z}{\sin z \cos z} + \cos z = \frac{1}{\sin z \cos z} + \cos z = \frac{2}{\sin 2z} + \cos z. \end{aligned}$$

Функцијата $\sin 2z$ монотонно расте за $z \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$, па на овој интервал функцијата $\frac{2}{\sin 2z}$ опаѓа. Функцијата $\cos z$ на интервалот $z \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ опаѓа. Значи, двете функции својот максимум го достигнуваат во точката $z = \frac{\pi}{6}$, па затоа и изразот y во оваа точка достигнува најголема вредност и тоа

$$y = \frac{2}{\sin 2\frac{\pi}{6}} + \cos \frac{\pi}{6} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{11\sqrt{3}}{6}.$$

IV година

1А. Нека A е 19-елементно подмножество од множеството $B = \{1, 4, 7, 10, 13, \dots, 100\}$. Докажи дека множеството A содржи два елемента чиј збир е делив со 104.

Решение. Да ги разгледаме следните подредени парови чиј збир е 104 : $(4, 100), (7, 97), \dots, (49, 55)$. Овие парови ги опфаќаат сите броеви од множеството B , освен броевите 1 и 52. Броевите 1 и 52 можеби припаѓаат во A , но не се појавуваат во ниту еден од паровите погоре. Заради ова, постојат најмалку $19 - 2 = 17$ броеви, елементи на множеството A , кои припаѓаат во некој од дадените парови. Бидејќи $17 > 16$, а постојат 16 парови на броеви чиј збир е делив со 104, од принципот на Дирихле, два од броевите во A мора да припаѓаат во ист пар, што значи постојат два елемента во A чии збир е делив со 104.

1Б. Докажи дека бројот $\frac{5^{125}-1}{5^{25}-1}$ е сложен.

Решение. Нека $a = 5^{25}$. Имаме

$$\begin{aligned} \frac{5^{125}-1}{5^{25}-1} &= \frac{a^5-1}{a-1} = \frac{(a-1)(a^4+a^3+a^2+a+1)}{a-1} = a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 \\ &= (a^2 + 3a + 1)^2 - 5a(a+1)^2 = (a^2 + 3a + 1)^2 - 5^{26}(a+1)^2 \\ &= (a^2 + 3a + 1 - 5^{13}(a+1))(a^2 + 3a + 1 + 5^{13}(a+1)). \end{aligned}$$

Конечно, од $a^2 + 3a + 1 + 5^{13}(a+1) > a^2 + 3a + 1 - 5^{13}(a+1) > 1$ следува дека бројот $\frac{5^{125}-1}{5^{25}-1}$ е сложен.

2А. Одреди ги сите парови цели броеви x и y такви што $1 + 2026x + 2028y = xy$.

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$xy - 2026x - 2028y + 2026 \cdot 2028 = 1 + 2026 \cdot 2028$$

$$x(y - 2026) - 2028(y - 2026) = 1 + 2026(2 + 2026)$$

$$(x - 2026)(y - 2026) = 1 + 2 \cdot 2026 + 2026^2$$

$$(x - 2028)(y - 2026) = (1 + 2026)^2$$

$$(x - 2028)(y - 2026) = 2027^2.$$

Бројот 2027 е прост, па затоа од последната равенка добиваме

$$x - 2028 \in \{\pm 1, \pm 2027, \pm 2027^2\},$$

од каде ги добиваме следниве решенија на дадената равенка

$$(x, y) \in \{(2029, 2027^2 + 1), (2027, -2027^2 + 2026), (4055, 4053),$$

$$(1, -1), (2027^2 + 2028, 2027), (-2027^2 + 2028, 2025)\}$$

2Б. Најди ја равенката на заедничката тангента на параболите

$$y = x^2 + 2x + 2 \text{ и } y = x^2 + x + 2.$$

Решение. Нека заедничката тангента има равенка $y = kx + b$. Тогаш секоја од равенките $x^2 + 2x + 2 = kx + n$ и $x^2 + x + 2 = kx + n$ има единствено решение. Дискриминантите на квадратните равенки кои се добиваат $x^2 + (2 - k)x + 2 - n = 0$ и $x^2 + (1 - k)x + 2 - n = 0$ молра да се еднакви на нула, односно $k^2 - 4k + 4n - 4 = 0$ и $k^2 - 2k + 4n - 7 = 0$. Ако од првата равенка ја одземеме втората добиваме $-2k + 3 = 0$, т.е. $k = \frac{3}{2}$, па со замена во една од равенките наоѓаме $n = \frac{31}{16}$. Значи, заедничката тангента на дадените параболи е $y = \frac{3}{2}x + \frac{31}{16}$.

3А. Во триаголникот ABC симетралата на аголот во темето A ја сече страната BC во точка D , а симетралата на аголот во темето C ја сече страната AB во точка E . Аголот во темето B е поголем од 60° . Докажи дека $\overline{AE} + \overline{CD} < \overline{AC}$.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за страните на триаголникот $\overline{AB} = c, \overline{BC} = a, \overline{AC} = b$. Имаме $\beta > 60^\circ$, па бидејќи функцијата $\cos x$ опаѓа на интервалот $[0, \frac{\pi}{2}]$ имаме $\cos \beta < \cos 60^\circ$. Од косинусната

теорема следува неравенството $\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \cos\beta < \frac{1}{2}$, кое последователно е еквивалентно со неравенствата

$$a^2 + c^2 < ac + b^2,$$

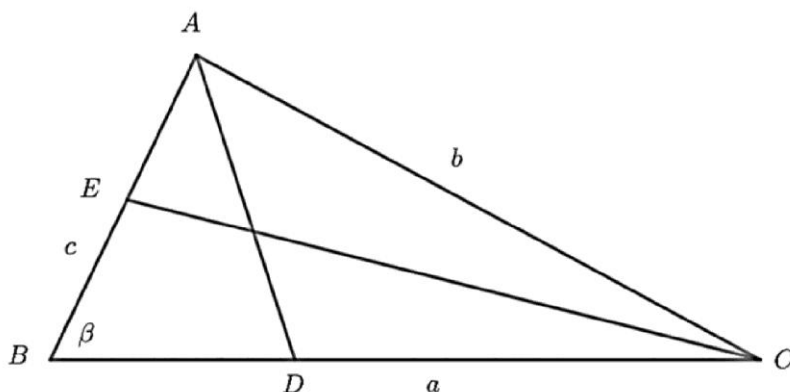
$$a^2 + c^2 + ab + bc < ac + b^2 + ab + bc,$$

$$c(b+c) + a(a+b) < a(b+c) + b(b+c),$$

$$c(b+c) + a(a+b) < (a+b)(b+c),$$

$$\frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} < 1,$$

$$\frac{bc}{a+b} + \frac{ba}{b+c} < b.$$



Според теоремата за односот во кој симетралата на аголот ја дели спротивната страна имаме $\overline{AE} = \frac{bc}{a+b}$ и $\overline{CD} = \frac{ab}{b+c}$. Конечно, со замена во горното неравенство го добиваме бараното неравенство.

3Б. Определи ги првите две и последните две цифри на децималниот запис на бројот x_{1001} , ако $x_1 = 2$ и $x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt[10]{2}} x_n + \frac{\sqrt[10]{2}-1}{\sqrt[10]{2}}, n \in \mathbb{N}$.

Решение. Од рекурентната дефиниција на низата добиваме

$$x_{n+1} - 1 = \frac{1}{\sqrt[10]{2}} (x_n - 1), n \in \mathbb{N}.$$

Дефинираме низа $y_n = x_n - 1, n \in \mathbb{N}$ при што $y_1 = 1$ и $y_{n+1} = \frac{1}{\sqrt[10]{2}} y_n, n \in \mathbb{N}$.

Според тоа, $\{y_n\}$ е геометричка прогресија со прв член $y_1 = 1$ и количник $\frac{1}{\sqrt[10]{2}}$. Затоа $y_{n+1} = y_1 \left(\frac{1}{\sqrt[10]{2}}\right)^n, n \in \mathbb{N}$. Имаме $y_{1001} = \frac{1}{2^{100}}$ и $x_n = y_n + 1, n \in \mathbb{N}$, од каде добиваме

$$x_{1001} = 1 + \frac{1}{2^{100}} = 1 + \frac{5^{100}}{10^{100}} = 1 + \underbrace{0,00...01}_{100 \text{ нули}} \cdot 5^{100}.$$

Значи, првите две цифри на бројот x_{1001} се 1 и 0, а последните две цифри се 2 и 5.

4А. Низата $f(1), f(2), f(3), \dots$ е определена со

$$f(n) = \frac{1}{n} \left(\left[\frac{n}{1} \right] + \left[\frac{n}{2} \right] + \dots + \left[\frac{n}{n} \right] \right).$$

Докажи дека $f(n+1) < f(n)$ за бесконечно многу природни броеви n .

Забелешка. $[x]$ е најголемиот цел број кој не е поголем од x , односно $[x] = k$ ако и само ако $k \leq x < k+1$.

Решение. Нека $g(n) = \left[\frac{n}{1} \right] + \left[\frac{n}{2} \right] + \dots + \left[\frac{n}{n} \right] = nf(n)$ и да ставиме $g(0) = 0$.

Лесно се докажува дека $\left[\frac{n}{k} \right] - \left[\frac{n-1}{k} \right] = 1$ ако $k | n$, а $\left[\frac{n}{k} \right] - \left[\frac{n-1}{k} \right] = 0$ ако $k \nmid n$.

Според тоа, имаме

$$g(n) - g(n-1) = \left(\left[\frac{n}{1} \right] - \left[\frac{n-1}{1} \right] \right) + \left(\left[\frac{n}{2} \right] - \left[\frac{n-1}{2} \right] \right) + \dots + \left(\left[\frac{n}{n} \right] - \left[\frac{n-1}{n} \right] \right) = d(n),$$

каде $d(n)$ е бројот на природните делители на n . Имаме

$$g(n) = g(n-1) + d(n) = g(n-2) + d(n-1) + d(n) = \dots = d(1) + d(2) + \dots + d(n).$$

Според тоа,

$$f(n) = \frac{d(1) + d(2) + \dots + d(n)}{n}.$$

Условот $f(n+1) < f(n)$ е еквивалентен со

$$\frac{d(1) + d(2) + \dots + d(n) + d(n+1)}{n+1} < f(n).$$

Бидејќи

$$d(1) + d(2) + \dots + d(n) = nf(n)$$

следува дека доволно е да докажеме дека постојат бесконечно многу природни броеви n за кои важи $d(n+1) < f(n)$. Јасно, последниот услов е исполнет за бесконечно многу броеви n за кои бројот $n+1$ е прост. Притоа важи $d(n+1) = 2 < f(n)$.

4Б. За секој природен број n , докажи дека важи

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{5}{4}.$$

Решение. Ако го искористиме неравенството

$$\frac{1}{k^3} < \frac{1}{(k-1)k(k+1)}, \text{ за } k > 1$$

и равенството

$$\frac{1}{(k-1)k(k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{2}{k} + \frac{1}{k+1} \right), \text{ за } k > 1$$

добиваме

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} &< 1 + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{1} - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1} \right) \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+2} = \frac{5}{4} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2n} = \frac{5}{4} + \frac{1}{2n(n+1)} < \frac{5}{4}. \end{aligned}$$