ЈБМО 2018

1. Определи ги сите парови од цели броеви (m,n) кои ја задоволуваат равенката
$$m^5 - n^5 = 16mn.$$
Решение. Ако еден од m или n е 0, тогаш и другиот мора да е 0 и $(m,n)=(0,0)$ е едно решение. Ако $mn \neq 0$, нека $d=(m,n)$ и $m=da$, $n=db,\ a,b \in \mathbb{Z}$ така што $(a,b)=1$. Тогаш дадената равенка е еквивалентна на равенката
$$d^3a^5 - d^3b^5 = 16ab \qquad (1).$$
Од горната равенка заклучуваме дека $a \mid d^3b^5$, од каде $a \mid d^3$. Слично се покажува дека $b \mid d^3$. Бидејќи $(a,b)=1$, добиваме $ab \mid d^3$, па можеме да запишеме $d^3 = abr$ за $r \in \mathbb{Z}$. Тогаш, од равенката (1) добиваме
$$abra^5 - abrb^5 = 16ab$$
$$r(a^5 - b^5) = 16.$$
Според тоа, разликата $a^5 - b^5$ мора да е делител на 16, што значи дека
$$a^5 - b^5 = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16.$$
Ако $|a^5 - b^5| = 1$, тогаш $a = \pm 1$ и $b=0$ или $a=0$ и $b=\pm 1$, што е контрадикција. Ако $|a^5 - b^5| = 2$, тогаш $a=1$ и $b=-1$ или $a=-1$ и $b=1$. Тогаш $r=-8$, и $d^3=-8$, т.е. $d=-2$. Според тоа, $(m,n)=(-2,2)$. Ако $|a^5 - b^5| > 2$, тогаш без губење на општоста можеме да земеме дека $a>b$ и $a \geq 2$. Ставаме $a = x+1$ за $x \geq 1$ и добиваме
$$\begin{aligned} |a^5 - b^5| &= |(x+1)^5 - b^5| \\ &\geq |(x+1)^5 - x^5| \\ &= |5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1| \geq 31 \end{aligned},$$
што не е можно. Според тоа, единствените решенија се $(m,n)=(0,0)$ или $(-2,2)$.

2. Нека n трицифрени броеви ги задоволуваат следните својства:
(1) Ниту еден број не ја содржи цифрата 0.
(2) Збирот на цифрите на секој број е 9.

(3) Цифрите на единиците на било кои два броја се различни.
(4) Цифрите на десетките на било кои два броја се различни.
(5) Цифрите на стотките на било кои два броја се различни.
Определи ја најголемата можна вредност за n.

Решение. Нека *S* го означува множеството од трицифрените броеви кои имаат збир на цифрите 9 и ниту една од нив не е 0. Најпрво ќе го определиме бројот на елементите на множеството *S*. Секој елемент на S може да се добие од 111 со низа од 6 букви *A* (што значи дека додаваме 1 на соодветната цифра) и 2 букви G (што значи одиме на наредната цифра). На пример бројот 324 може да се добие од 111 со низата AAGAGAAA. Постојат вкупно $\frac{8!}{6!\cdot 2!}=28$ такви зборови, односно *S* содржи 28 броеви. Сега, од условите (3), (4), (5), ако $\overline{abc}$ е во бараното множество *T*, тогаш секој од броевите од облик $\overline{**c}$, $\overline{*b*}$ и $\overline{a**}$ не може да биде во T. Бидејќи има $a+b-2$ броја од првиот тип, $a+c-2$ од вториот и $b+c-2$ од третиот, вкупно од сите три типа има

$$(a+b-2)+(b+c-2)+(c+a-2)=2(a+b+c)-6=2\cdot 9-6=12$$

различни броја кои не може да се во *T* ако $\overline{abc}$ е во T. Според тоа, ако *T* има *n* броеви, тогаш 12*n* броеви од *S* не се дозволени. Но, секој број од *S* може да биде забранет не повеќе од три пати, по еднаш за секоја негова цифра, од каде следува $n+\frac{12n}{3}\leq 28$, т.е. $n\leq\frac{28}{5}$. Бидејќи n е цел број, добиваме $n\leq 5$. За $n=5$ можеме да го земеме множеството

$$T=\{144,252,315,423,531\}.$$

Забелешка. Бројот на елементите на множеството *S* може да се пресмета на повеќе начини. За бројот на решенијата на равенката

$$x_1+x_2+...+x_k=n$$

во множеството на природни броеви, каде редоследот на x_i е важен, е познато дека е еднаков на $\binom{n-1}{k-1}$. Во нашиот случај сакаме да го изброиме бројот на решенија на равенката $a+b+c=9$ во множеството природни броеви. Според горната дискусија, $\binom{9-1}{3-1}=28$. Користејќи го општиот резултат од погоре, можеме исто така да покажеме дека постојат $a+b-2$ броја од облик $\overline{**c}$.

3. Нека $k>1$ е природен број и $n>2018$ е непарен природен број. Ненултите рационални броеви $x_1,x_2,...,x_n$ се такви што не се сите еднакви

меѓу себе и ги задоволуваат равенствата
$$x_1+\frac{k}{x_2}=x_2+\frac{k}{x_3}=x_3+\frac{k}{x_4}=...=x_{n-1}+\frac{k}{x_n}=x_n+\frac{k}{x_1}.$$
Определи:

а) го производот $x_1x_2...x_n$ како функција од k и n,

б) ја најмалата вредност на k за која постојат $n,x_1,x_2,...,x_n$ кои ги исполнуваат дадените услови.

Решение. а) Ако $x_i=x_{i+1}$ за некој i (по претпоставка дека $x_{n+1}=x_1$), тогаш од дадените равенства следува дека сите x_i се еднакви, што претставува контрадикција. Според тоа, $x_1\neq x_2$ и $x_1-x_2=k\frac{x_2-x_3}{x_2x_3}$.

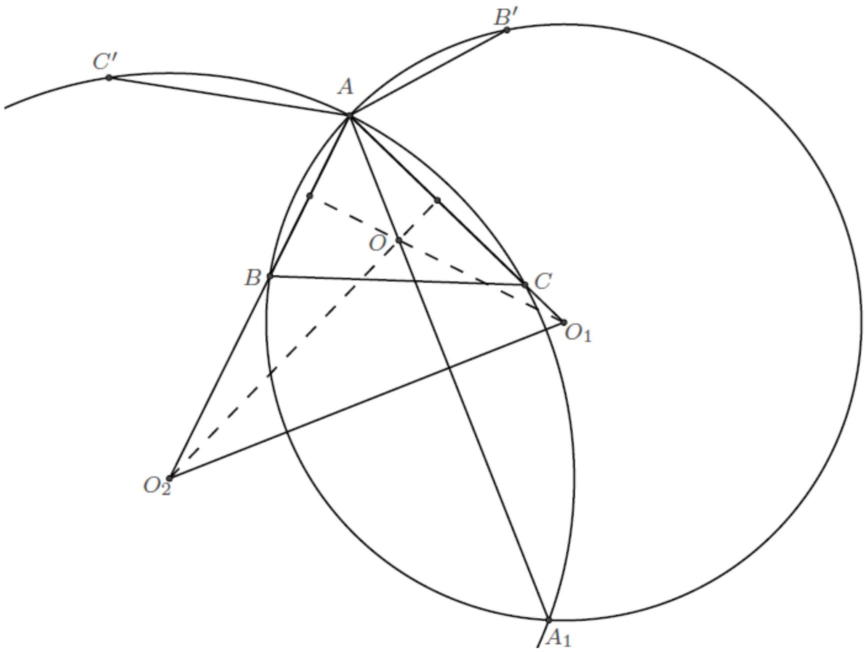
Аналогно добиваме
$$x_1-x_2=k\frac{x_2-x_3}{x_2x_3}=k^2\frac{x_3-x_4}{(x_2x_3)(x_3x_4)}=...=k^n\frac{x_1-x_2}{(x_2x_3)(x_3x_4)...(x_1x_2)}.$$
Бидејќи $x_1\neq x_2$ добиваме $x_1x_2...x_n=\pm\sqrt{k^n}=\pm k^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{k}$. Ако една од овие две вредности, позитивна или негативна, е достигната, тогаш другата ќе биде исто така достигната со промена на знаците на сите x_i бидејќи n е непарен број.

б) Од претходниот резултат, бидејќи n е непарен број, заклучуваме дека k е точен квадрат, од каде $k\geq 4$. За $k=4$ нека $n=2019$ и
$$x_{3j}=4, x_{3j-1}=1, x_{3j-2}=-2 \text{ за } j=1,2,...,673.$$
Според тоа, бараната најмала вредност е $k=4$.

Забелешка. Постојат повеќе начини на кои може да се конструира пример кога $k=4$ и $n=2019$. Бидејќи $3|2019$, идејата е да најдеме три броеви x_1,x_2,x_3, не сите еднакви меѓу себе кои ги задоволуваат дадените равенства и да ги повториме како вредности за останатите x_i. Според тоа, сакаме да најдеме x_1,x_2,x_3 такви што $x_1+\frac{k}{x_2}=x_2+\frac{k}{x_3}=x_3+\frac{k}{x_4}$. Од претходната дискусија $x_1x_2x_3=\pm 8$. Нека претпоставиме, без губење на општоста, дека $x_1x_2x_3=-8$. Тогаш со решавање на горниот систем гледаме дека ако $x_1\neq 2$, тогаш $x_2=-\frac{4}{x_1-2}$ и $x_3=2-\frac{4}{x_1}$, што води до бесконечно многу решенија. Примерот во официјалното решение е добиен за $x_1=-2$.

4. Нека ABC е остроаголен триаголник, A', B' и C' се симетричните точки на темињата A, B и C во однос на правите BC, CA и AB, соодветно и нека кружниците опишани околу триаголниците ABB' и ACC' по втор пат се сечат во точката A_1. Точките B_1 и C_1 се аналогно дефинирани. Докажи дека правите AA_1, BB_1 и CC_1 имаат една заедничка точка.

Решение. Нека O_1, O_2 и O се центрите на опишаните кружници околу ABB', ACC' и ABC, соодветно. Бидејќи AB е симетрала на отсечката CC', O_2 е пресекот на симетралата на отсечката AC со AB. Слично, O_1 е пресекот на симетралата на отсечката AB со AC. Следува дека O е ортоцентар на триаголникот AO_1O_2. Според тоа, AO е нормална на O_1O_2. Од друга страна, AA_1 е заедничка тетива за двете кружници, од каде следува дека е нормална на O_1O_2. Добиваме дека AA_1 минува низ O. Слично се покажува дека BB_1 и CC_1 минуваат низ O, од каде следува дека трите прави минуваат низ точката O.



Забелешка. Ќе дадеме и друг пристап. Најпрво покажуваме дека A_1, B и C' се колинеарни. Навистина, бидејќи

$$\measuredangle BAB' = \measuredangle CAC' = 2\measuredangle BAC,$$

тогаш од кружниците (ABB') и (ACC') добиваме

$$\measuredangle AA_1B = \frac{\measuredangle BA_1B'}{2} = \frac{180^\circ - \measuredangle BAB'}{2} = 90^\circ - \measuredangle BAC = \measuredangle AA_1C'.$$

Следува дека

$$\measuredangle A_1AC = \measuredangle A_1C'C = \measuredangle BC'C = 90^\circ - \measuredangle ABC \qquad (1).$$

Од друга страна, ако O е центар на опишаната кружница околу ABC, тогаш

$$\measuredangle OAC = 90^\circ - \measuredangle ABC \qquad (2).$$

Од (1) и (2) заклучуваме дека A_1, A и O се колинеарни. Слично се покажува дека BB_1 и CC_1 минуваат низ O, од каде следува дека трите прави минуваат низ точкат O.