Јенс Карстенсен, Данска
Алија Муминагиќ, Данска

ДА СЕ ЗАПРАШАМЕ ...

Во редовната настава се запознавте со Питагоровата теорема, која гласи:

Во правоаголен триаголник плоштината на квадратот конструиран над хипотенузата е еднаква на збирот на плоштините на квадратите конструирани над катетите.

Некои од вас ја знаат и обратната Питагорова теорема, а се запознати и со Питагоровиот триаголник и Питагоровите тројки броеви. Да се потсетиме:

Правоаголниот триаголник чии должини на страни се природни броеви се нарекува Питагоров триаголник. За подредената тројка броеви (a,b,c) велиме дека е Питагорова ако a,b се катета, а c е хипотенуза на Питагоров триаголник, т.е. ако a,b,c сде природни броеви за кои важи

$$a^2+b^2=c^2. \tag{1}$$

Равенката (1) е Диофантова равенка, т.е. равенка чии решенија ги бараме во множеството цели броеви.

Во врска со равенката (1) интересно е следново прашање:

Дали постојат триаголници чии големини на аглите α,β,γ мерени во степени се природни броеви такви што важи

$$\alpha^2+\beta=\gamma^2. \tag{2}$$

Во следните разгледувања ќе дадеме одговор на ова прашање. Прво да заблежиме дека во случајов немаме услов триаголникот да е правоаголен. Понатаму, од $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ следува $\gamma=180^\circ-(\alpha+\beta)$ и ако замениме во (2) добиваме

$$\alpha^2+\beta^2=(180^\circ-(\alpha+\beta))^2.$$

Во натамошните разгледувања, за поедноставно ќе го испуштиме знакот за степен, т.е. наместо 180° че пишуваме 180. Последната равенка е еквивалентна со равенката

$$\alpha^2+\beta^2=180^2-360(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)^2,$$

од каде по средувањето добиваме

$$\alpha=\frac{16200-180\beta}{180-\beta}=\frac{180(\beta-180)+16200}{\beta-180},$$

односно

$$\alpha = 180 + \frac{16200}{\beta - 180}. \qquad (3)$$

Равенките од типот (3) се добро познати. За да α е природен број, треба $\beta - 180$ да е делител на 16200. Сега $16200 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^3$ и ако би се испитувале сите делители на 16200 ќе имаме обемна и макотрпна работа.

Равенката е еквивалентна со равенката $180 - \alpha = -\frac{16200}{\beta - 180}$, т.е. со равенката

$$180 - \alpha = \frac{16200}{180 - \beta}. \qquad (4).$$

Знаеме дека важи $180 > 180 - \alpha > 0$, па од (4) следува $180(180 - \beta) > 16200$, односно $180 - \beta > \frac{16200}{180} = 90$. Според тоа, $\beta < 90$. Но, $16200 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^3$, па затоа за $180 - \beta$ ги имаме следниве можности: $2 \cdot 3^4$, $2^2 \cdot 3^3$, $3^3 \cdot 5$, $2 \cdot 3 \cdot 5^2$, $2^3 \cdot 3 \cdot 5$ и $2^2 \cdot 5^2$. Според тоа,

$180 - \beta = 2 \cdot 3^4$, т.е. $\beta = 18$,

$180 - \beta = 2^2 \cdot 3^3$, т.е. $\beta = 72$,

$180 - \beta = 3^3 \cdot 5$, т.е. $\beta = 45$,

$180 - \beta = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$, т.е. $\beta = 30$,

$180 - \beta = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, т.е. $\beta = 60$ и

$180 - \beta = 2^2 \cdot 5^2$, т.е. $\beta = 80$.

Сега, од (3) ги наоѓаме соодветните вредниости за α. За $\beta = 18$ наоѓаме $\alpha = 80$, а другите соодветни вредности се $\alpha : 30, 60, 72, 45, 18$. Сега, од $\gamma = 180 - (\alpha + \beta)$ наоѓаме дека со точност до пермутација на првите две координати следните три тројки (α, β, γ) ги задоволуваат условите на задачата:

(80,18,82), (30,72,78), (60,45,75).

Навистина,

$$80^2 + 18^2 = 82^2,\ 30^2 + 72^2 = 78^2,\ 60^2 + 45^2 = 75^2.$$

Проблемот кој погоре го разгледавме може да се набљудува како специјален случај на задачата да се најдат сите Питагорови тројки броеви (x, y, z) кои го задоволуваат условот $x + y + z = n$, каде n е даден природен број. Во нашиов случкај имавме $n = 180$.

Задачи за самостојна работа

1. Дали постои Питагорова тројка (x, y, z) таква што $x+y+z=2013$?
2. Дали постои Питагорова тројка (x, y, z) таква што $x+y+z=2014$?
3. Дали постои Питагорова тројка (x, y, z) таква што $x+y+z=2012$?