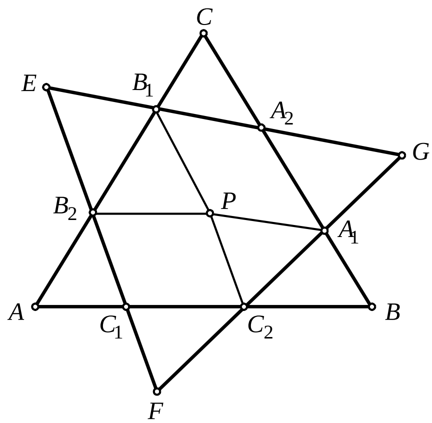
ЈММО 2009

1. На табла се напишани броевите $1,2,...,2009$. Се бришат неколку од нив и наместо нив на таблата се запишува остатокот на збирот на избришаните броеви при делење со 13. По определен број повторувања на оваа постапка на таблата останале само три броја од кои двата се 99 и 999. Определи го третиот број кој останал на таблата.
Решение. Нека третиот број е x. Јасно по секој чекор остатокот при делење на збирот на броевите на таблата со 13 не се менува.
Бидејќи
$$1+2+3+...+2009=\frac{2009\cdot 2010}{2}=1005\cdot 2009,$$
т.е. има остаток 2 при делење со 13, заклучуваме дека $99+999+x$ треба да има остаток 2 при делење со 13. Бидејќи $99+999=1098$, т.е. дава остаток 6 при делење со 13, а 99 и 999 не се остатоци следува дека $0\le x<13$ и добиваме дека $x=9$.

2. За целите броеви a и b важи
$$a=a^2+b^2-8b-2ab+16.$$
Докажи дека a е точен квадрат.
Решение. Имаме
$$9a=a^2+b^2+8a-8b-2ab+16=(a-b+4)^2,$$
па затоа $9a$ е точен квадрат, а оттука следува дека и a е точен квадрат.

3. Нека $\triangle ABC$ е рамностран. На страната AB се избрани точки C_1 и C_2, на AC се избрани точки B_1 и B_2 и на страната BC се избрани точки A_1 и A_2, такви што
$$\overline{A_1A_2}=\overline{B_1B_2}=\overline{C_1C_2}.$$
Нека пресечните точки на правите A_2B_1 и B_2C_1, B_2C_1 и C_2A_1, C_2A_1 и A_2B_1 се E, F и G, соодветно. Докажи дека триаголнкот формиран од отсечките B_1A_2, A_1C_2 и C_1B_2 е сличен со триаголникот $\triangle EFG$.



Решение. Нека триаголникот фор-

миран од отсечките B_1A_2, A_1C_2 и C_1B_2 го означиме со $\triangle A_3B_3C_3$. Нека P е точка во внатрешноста на $\triangle EFG$ така што $C_1C_2PB_2$ е паралелограм. Тогаш $\triangle B_2PB_1$ е рамностран, па затоа $PA_1A_2B_1$ е паралелограм. Од претходниве разгледувања имаме $PC_2 \parallel EF$ и $PA_1 \parallel EG$.
Затоа, $\triangle PC_2A_1 \sim \triangle EFG$. Од друга страна $\triangle PC_2A_1 \cong \triangle A_3B_3C_3$, па затоа важи $\triangle A_3B_3C_3 \sim \triangle EFG$.

4. Во секоја 1×1 клетка од правоаголна табла запишан е природен број. Во секој чекор дозволено е броевите запишани во секоја од клетките на произволно избран ред да се зголемат двапати, или пак броевите запишани во клетките на произволно избрана колона да се намалат за 1. Дали по конечен број чекори, може да се случи сите броеви на таблата да бидат нули.
Решение. Ќе покажеме дека бараната состојба може да се достигне.
Ако постојат броеви од првата колона еднакви на 1, тогаш ги „дуплираме“ нивните редови, а потоа првата колона ја намалуваме за 1.
Оваа постапка ја повторуваме се додека сите броеви од првата колона не станат еднакви на 1, а со нејзино „намалување“ за 1 сите броеви од првата колона стануваат нули.
Опишаната постапка ја применуваме на сите останати колони, и со тоа задачата е решена.
Ако пак ниту еден од броевите од дадена колона не е еднаков на 1, тогаш таа колона ја „намалуваме“ за 1 се додека барем еден број од дадената колона не стане еднаков на 1, а потоа ја применуваме погоре опишаната постапка.