Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2016/17 година

ТРАГОМ ЈЕДНЕ АЛГЕБАРСКЕ НЕЈЕДНАКОСТИ

Драгољуб Милошевић, Горњи Милановац

У *Тангенти* 55/3 (2008/09) на страни 8 дат је доказ следећег тврђења.

Теорема 1. *Ако су* a, b, c, x, z, y *позитивни реални бројеви, тада важи неједнакост*

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} . \tag{1}$$

У овом чланку ћемо отићи корак даље и показати да се неједнакост (1), на одређен начин, може уопштити. Потом ћемо приказати неке примене нове неједнакости.

Теорема 2. *Ако су* a, b, c, x, z, y *позитивни реални бројеви, тада важи неједнакост*

$$\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z} \geq \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)} . \tag{2}$$

Доказ. Применом неједнакости између аритметичке и геометријске средине позитивних бројева, имамо

$$\begin{aligned}
&a^3xyz+b^3x^2z+a^3y^2z \geq 3\sqrt[3]{a^3xyz\cdot b^3x^2z\cdot a^3y^2z}=3a^2bxyz ,\\
&b^3xyz+c^3xy^2+b^3xz^2 \geq 3b^2cxyz,\\
&c^3xyz+c^3x^2y+a^3yz^2 \geq 3c^2axyz ,\\
&a^3y^2z+b^3x^2z+b^3xyz \geq 3ab^2xyz ,\\
&a^3xyz+a^3yz^2+c^3x^2y \geq 3a^2cxyz ,\\
&b^3xz^2+c^3xy^2+c^3xyz \geq 3bc^2xyz ,\\
&b^3x^2z+a^3y^2z+c^3xy^2+c^3x^2y+a^3yz^2+b^3xz^2 \geq 6abcxyz .
\end{aligned}$$

Сабирањем ових седам неједнакости добијамо

$$(a^3+b^3+c^3)xyz+3(a^3y^2z+a^3yz^2+b^3x^2z+b^3xz^2+c^3xy^2+c^3x^2y) \geq$$

$$3xyz(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2)$$

$\Leftrightarrow$

$$3(a^3+b^3+c^3)xyz+3\big((a^3yz+b^3zx+c^3xy)(x+y+z)-xyz(a^3+b^3+c^3)\big)\geq$$

$$3xyz\big((a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc\big)+(a^3+b^3+c^3)xyz$$

$\Leftrightarrow$

$$3(a^3yz+b^3zx+c^3xy)(x+y+z)\geq xyz(a^3+b^3+c^3)\ .$$

Деобом леве и десне стране са $3xyz(x+y+z)$ добијамо

$$\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z}\geq\frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)},$$

што је и требало да се докаже.

□

Неједнакост (2) се може згодно искористити за доказивање неких других неједнакости.

Пример 1. (Македонска математичка олимпијада, 2010) *Ако су* a, b, c *позитивни бројеви чији је збир једнак* 3, *доказати неједнакост*

$$\frac{a^3+2}{b+2}+\frac{b^3+2}{c+2}+\frac{c^3+2}{a+2}\geq 3. \qquad (3)$$

Доказ. Стављајући прво $x=b+2$, $y=c+2$, $z=a+2$ у неједнакост (2), добијамо

$$\frac{a^3}{b+2}+\frac{b^3}{c+2}+\frac{c^3}{a+2}\geq\frac{(a+b+c)^3}{3\big((b+2)+(c+2)+(a+2)\big)}\ .$$

Стављајући потом $a=b=c=1$, $x=b+2$, $y=c+2$, $z=a+2$ у (2) и множећи обе стране са 2, добијамо

$$2\left(\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{a+2}\right)\geq\frac{2\cdot(1+1+1)^3}{3\big((b+2)+(c+2)+(a+2)\big)}\ .$$

Сабирањем последње две неједнакости, добијамо неједнакост

$$\frac{a^3+2}{b+2}+\frac{b^3+2}{c+2}+\frac{c^3+2}{a+2}\geq\frac{(a+b+c)^3+2\cdot 3^3}{3(a+b+c+6)},$$

која због услова $a+b+c=3$, даје тражену неједнакост (3).

□

Пример 2. *Нека су* a, b, c *дужине страница и* t_a, t_b, t_c *дужине одговарајућих тежишних дужи троугла* ABC. *Доказати да је*

$$\frac{a^2}{t_a^2}+\frac{b^2}{t_b^2}+\frac{c^2}{t_c^2}\geq 4. \tag{4}$$

Доказ. Ако у неједнакост (2) ставимо $x=at_a^2$, $y=bt_b^2$, $z=ct_c^2$, имамо

$$\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z}\geq\frac{(a+b+c)^3}{3(at_a^2+bt_b^2+ct_c^2)}. \tag{5}$$

Како је

$$t_a^2=\frac{1}{4}(-a^2+2b^2+2c^2)$$

$$t_b^2=\frac{1}{4}(-b^2+2c^2+2a^2)$$

$$t_c^2=\frac{1}{4}(-c^2+2a^2+2b^2)$$

добијамо

$$at_a^2+bt_b^2+ct_c^2=$$

$$\frac{1}{4}\big(a(-a^2+2b^2+2c^2)+b(-b^2+2c^2+2a^2)+c(-c^2+2a^2+2b^2)\big)=$$

$$\frac{1}{4}(2ab(a+b)+2bc(b+c)+2ca(c+a)-a^3-b^3-c^3)=$$

$$\frac{1}{4}\big(2(a+b+c)(ab+bc+ca)-6abc-(a^3+b^3+c^3)\big).$$

Ако су s полуобим, R и r полупречници описане, односно уписане кружнице и P површина троугла ABC, тада је

$$ab+bc+ca=s^2+4Rr+r^2$$

$$a^2+b^2+c^2=2(s^2-4Rr-r^2)$$

$$a^3+b^3+c^3=2s(s^2-6Rr-3r^2)$$

$$abc=4RP=4Rrs.$$

(Видети *Тангента* 69/1 (2012/13), стр. 7-8.) Замењујући у горњу једнакост, добијамо

$$at_a^2+bt_b^2+ct_c^2=\frac{s}{2}(s^2+2Rr+5r^2) \tag{6}$$

Сада из (5) і (6) следи

$$\frac{a^2}{t_a^2}+\frac{b^2}{t_b^2}+\frac{c^2}{t_c^2}\geq\frac{8s^3}{3\frac{s}{2}(s^2+2Rr+5r^2)}$$

$$=\frac{16s^2}{3(s^2+2Rr+5r^2)}. \tag{7}$$

Из неједнакости између аритметичке и геометријске средине имамо $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, односно $(a+b+c)^3 \geq 27abc$. Како је $a+b+c=2s$ и $abc=4Rrs$, то даје $8s^3 \geq 27 \cdot 4Rrs$, односно

$$Rr \leq \frac{2s^2}{27}\,. \tag{8}$$

На основу познате Ојлерове неједнакости је $R \geq 2r$, па из (8) следи

$$r^2 \leq \frac{s^2}{27}\,. \tag{9}$$

Коначно, из неједнакости (7), (8) и (9) добијамо

$$\frac{a^2}{t_a^2}+\frac{b^2}{t_b^2}+\frac{c^2}{t_c^2} \geq \frac{16s^2}{3\left(s^2+\frac{4s^2}{27}+\frac{5s^2}{27}\right)}=4.$$

$\square$

ЗАДАЦИ

1. Доказати да за позитивне бројеве a, b, c важи неједнакост

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \geq ab+bc+ca.$$

2. Ако су a, b, c позитивни бројеви такви да је $ab+bc+ca=1$, доказати да важи неједнакост

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

3. Доказати неједнакости (1) и (3) користећи неједнакост између аритметичке и геометријске средине.

4. Ако су a, b, c дужине страница, t_a, t_b, t_c дужине одговарајућих тежишних дужи и s полуобим троугла ABC, доказати да важи неједнакост

$$at_a+bt_b+ct_c \leq \frac{2s^2}{\sqrt{3}}\,.$$

5. Ако су a, b, c позитивни бројеви, такви да је $abc=1$, наћи најмању вредност израза

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\,.$$