MATEMATIKA

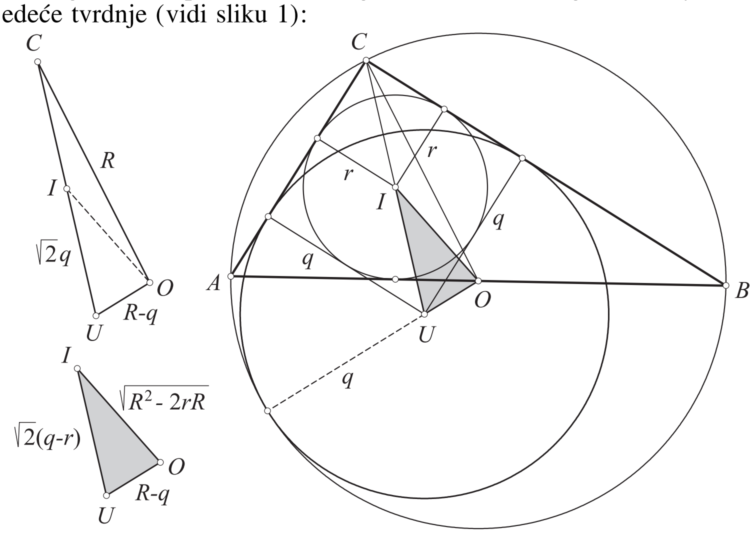
Neki slučajevi Apolonijevog problema

Zvonko Čerin[1], *Zagreb*

Apolonijev problem traži kružnice koje dodiruju tri zadane kružnice. Jer pri tome pravce smatramo isto kružnicama vidimo da je potraga za kružnicom koja dodiruje dva pravca stranica trokuta i njegovu opisanu kružnicu zapravo poseban slučaj Apolonijevog problema. U ovom članku prvo razmatramo slučaj kada je promatrani trokut pravokutan jer se tada tražena kružnica za pravce kateta lagano odredi budući da je u homotetiji s upisanom i pripisanom kružnicom (vrha pravog kuta). Poslije se pokazuje da homotetija igra ključnu ulogu i u slučaju bilo kakvog trokuta. Iz oblika koeficijenta te homotetije može se zaključiti da je trokut pravokutan ako jedna od kružnica ima polumjer jednak promjeru upisane kružnice. Na kraju se opisuju dva načina konstrukcija tih kružnica.

Rješenje Muminagića i Nykøbinga

U članku "En cirkel i den retvinklede trekant" na 849. stranici danskog časopisa Matematik Magasinet iz prosinca 2006. godine A. Muminagić i F. Nykøbing opisuju dokaz sljedeće tvrdnje (vidi sliku 1):



Slika 1. Muminagić i Nykøbing dokazuju relaciju $q = 2r$ primjenom teorema o kosinusu kuta pri vrhu U u dva izdvojena trokuta.

[1] Autor je redoviti profesor na Matematičkom odjelu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu.

Teorem 1. *Polumjer kružnice koja dotiče iznutra opisanu kružnicu i oba pravca kateta pravokutnog trokuta jednak je promjeru njegove upisane kružnice.*

Njihovo rješenje koristi ne baš trivijalnu činjenicu (tzv. Eulerov teorem) da je u svakom trokutu udaljenost središta upisane i opisane kružnice jednaka $\sqrt{R^2 - 2rR}$, gdje su r i R polumjeri tih kružnica. Dakle, uz oznake na slici 1, znamo duljine stranica trokuta IOU i COU pa primjenom teorema o kosinusu kuta pri vrhu U možemo odmah pisati

$$\cos U = \frac{2(q-r)^2 + (R-q)^2 - R^2 + 2rR}{2\sqrt{2}(q-r)(R-q)} = \frac{2q^2 + (R-q)^2 - R^2}{2\sqrt{2}q(R-q)}.$$

Oduzmemo li drugi razlomak od prvog, poslije sređivanja dobijemo

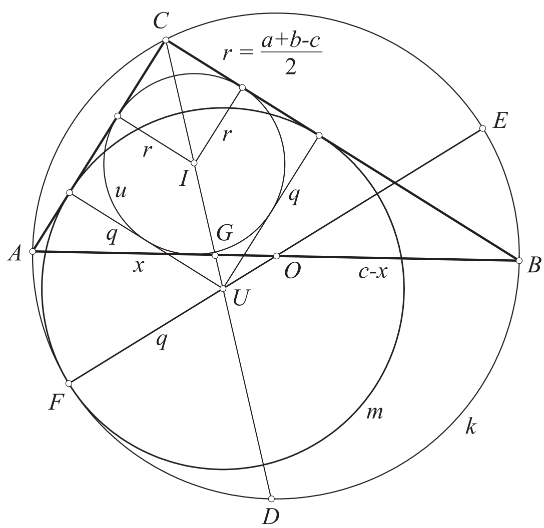
$$\frac{\sqrt{2}r\,(2r-q)}{4\,(q-r)\,(R-q)}.$$

Iz toga zaključujemo da je doista $q = 2r$.

Dokaz teorema 1 potencijom točke

Sada ćemo opisati drugi geometrijski dokaz teorema 1 koji ne koristi Eulerov teorem već se zasniva na dvostrukoj primjeni teorema o potenciji točke u unutrašnjosti kružnice (vidi [2, str. 17]).

Neka simetrala CI pravog kuta siječe hipotenuzu AB u točki G a opisanu kružnicu k (pored točke C još) u točki D (vidi sliku 2). Uvedimo oznake $|CD| = d$, $|CG| = g$ i $|AG| = x$. Neka kružnica m dotiče kružnicu k u točki F i neka je E njoj antipodalna točka u odnosu na kružnicu k.



Slika 2. Dokaz relacije $q = 2r$ primjenom teorema o potenciji na točke G i U.

Iz teorema o potenciji točke U (za tetive $\overline{CD}$ i $\overline{EF}$) imamo

$$q(2R-q)=\sqrt{2}\,q(d-\sqrt{2}\,q),$$

što daje $d=\dfrac{2R+q}{\sqrt{2}}$. S druge strane, teorem o potenciji točke G (za tetive $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$) povlači $x(c-x)=g(d-g)$ što daje $d=g+\dfrac{x(c-x)}{g}$. Izjednačavanjem ovih izraza za d možemo izračunati q jer se x i g lagano dobiju istovremeno primjenom teorema o kosinusu polovica pravog kuta u trokutima AGC i GCB.

I doista, iz prvog trokuta slijedi

$$x^2=b^2+g^2-\sqrt{2}\,b\,g, \tag{1}$$

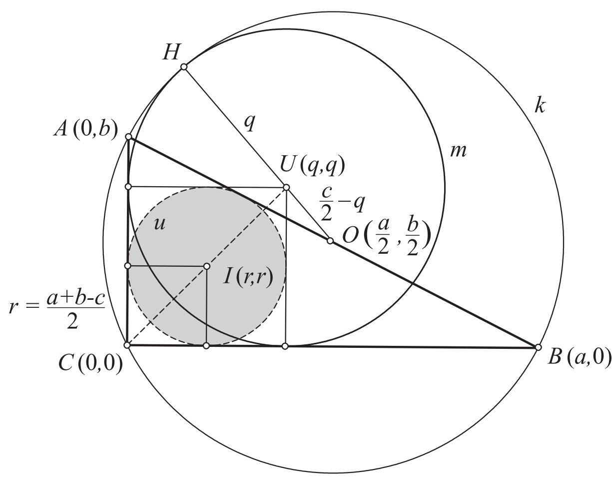
a iz drugog imamo

$$(c-x)^2=a^2+g^2-\sqrt{2}\,a\,g. \tag{2}$$

U razlici $(2)-(1)$ kvadratni članovi se dokidaju pa slijedi $x=\dfrac{2\,b^2+\sqrt{2}g(a-b)}{2\,c}$. Uvrstimo li to u razliku lijeve i desne strane jednadžbe (1) zaključujemo $g=\dfrac{\sqrt{2}\,a\,b}{a+b}$. Zato je $x=\dfrac{b\,c}{a+b}$ i $q=a+b-c=2\,r$. U tim računima više puta treba primjeniti Pitagorinu relaciju $c^2=a^2+b^2$.

Najlakši dokaz analitičkom geometrijom

Daleko jednostavniji dokaz teorema 1 možemo dobiti primjenom analitičke geometrije. Treba samo lukavo postaviti pravokutni trokut u pravokutni koordinatni sustav i znati kako se računa udaljenost dvije točke.



Slika 3. Dokaz teorema 1 analitičkom geometrijom.

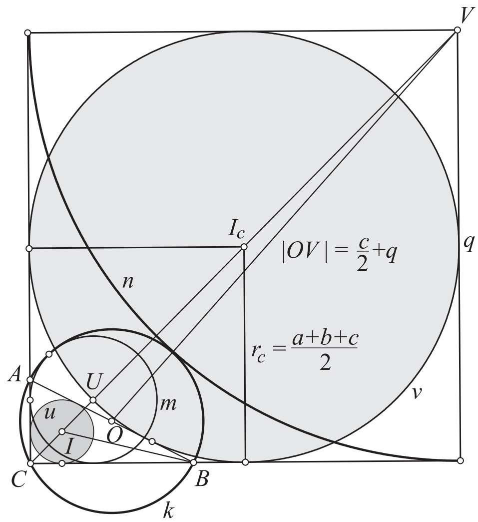
Prema oznakama na slici 3, udaljenost točaka O i U (središta opisane kružnice k i središta tražene kružnice m) mora biti jednaka $\dfrac{c}{2} - q$ (razlici njihovih polumjera). Dakle,

$$\left(\frac{c}{2} - q\right)^2 = \left(\frac{a}{2} - q\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - q\right)^2$$

što je ekvivalentno s $q(q - a - b + c) = 0$. Zato je $q = a + b - c = 2r$, jer $q = 0$ vodi na trivijalno rješenje (koje je matematički potpuno prihvatljivo ako točku smatramo kružnicom ništičnog polumjera).

Slučaj dodirivanja izvana

Velika prednost prethodnog rješenja analitičkom geometrijom je što njega možemo lagano prilagoditi slučaju kada tražena kružnica dodiruje izvana opisanu kružnicu i pravce kateta (vidi sliku 4).



Slika 4. Kružnice m i n koje dodiruju pravce kateta i iznutra i izvana opisanu kružnicu k.

Udaljenost točaka O i V (središta opisane kružnice k i središta tražene kružnice n) mora biti jednaka $\dfrac{c}{2} + q$ (zbroju njihovih polumjera). Dakle,

$$\left(\frac{c}{2} + q\right)^2 = \left(\frac{a}{2} - q\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - q\right)^2$$

što je ekvivalentno s $q(q - a - b - c) = 0$. Zato je $q = a + b + c = 2r_c$ (tj. promjer pripisane kružnice v pridružene vrhu C pravog kuta).

Prema tome dokazali smo sljedeći teorem.

Teorem 2. *Polumjer kružnice koja dotiče izvana opisanu kružnicu i oba pravca kateta pravokutnog trokuta jednak je promjeru pripisane kružnice hipotenuze.*

Poboljšanje teorema 1 i 2

Iako teoremi 1 i 2 samo opisuju koliki su polumjeri kružnica m odnosno n iz našeg dokaza analitičkom geometrijom jasno je da vrijedi sljedeće poboljšanje tih teorema koje mnogo preciznije određuje položaj tih kružnica.

Teorem 3. *Neka trokut ABC ima pravi kut u vrhu C, u njegova upisana a v pripisana kružnica nasuprot vrha C. Neka je $h = h(C, 2)$ homotetija ravnine sa središtem u točki C i koeficijentom 2. Onda kružnica $m = h(u)$ dotiče iznutra opisanu kružnicu k trokuta ABC i pravce AC i BC dok kružnica $n = h(v)$ dotiče izvana opisanu kružnicu k i pravce AC i BC.*

Opći slučaj

Sada se postavlja prirodno pitanje kako za trokut ABC s pravim kutom u vrhu C odrediti četiri kružnice analogne kružnicama m i n koje odgovaraju vrhovima A i B ili još općenitije pitanje kako opisati te kružnice za bilo kakav trokut ABC (bez ikakvih pretpostavki o njegovim kutovima). Iznenađujuće jednostavan odgovor daje sljedeći teorem.

Teorem 4. *Neka je u upisana kružnica trokuta ABC a v njemu pripisana kružnica nasuprot vrha A. Neka je $h = h(A, \lambda)$ homotetija ravnine sa središtem u točki A i koeficijentom $\lambda = \dfrac{2}{1+\cos A}$. Onda kružnica $m = h(u)$ dotiče iznutra opisanu kružnicu k trokuta ABC i pravce AB i AC dok kružnica $n = h(v)$ dotiče izvana opisanu kružnicu k i pravce AB i AC.*

U dokazu analitičkom geometrijom, odaberimo pravokutni koordinatni sustav tako da je $A(0, 0)$, $B(r(f+g), 0)$ i $C\left(\dfrac{(f^2-1)\,g\,r}{f\,g-1}, \dfrac{2f\,g\,r}{f\,g-1}\right)$. Parametri f i g su kotangensi polovica kutova A i B dok je r polumjer upisane kružnice trokuta ABC.

Prema univerzalnoj trigonometrijskoj substituciji vrijedi

$$\cos A = \frac{1-\left(\tan\dfrac{A}{2}\right)^2}{1+\left(\tan\dfrac{A}{2}\right)^2} = \frac{1-\dfrac{1}{f^2}}{1+\dfrac{1}{f^2}} = \frac{f^2-1}{f^2+1}.$$

Zato je $\lambda = \dfrac{1+f^2}{f^2}$. Budući da središte I upisane kružnice ima koordinate $(f\,r, r)$, slijedi da točka $U = h(I)$ ima koordinate $\left(\dfrac{(1+f^2)\,r}{f}, \dfrac{(1+f^2)\,r}{f^2}\right)$. Lagano se provjeri da je točka $O\left(\dfrac{(f+g)\,r}{2}, \dfrac{(g+f+fg-1)\,(f+g-f\,g+1)\,r}{fg-1}\right)$ udaljena od sva tri vrha A, B i C za istu vrijednost $R = \dfrac{r(1+g^2)(1+f^2)}{4(f\,g-1)}$. I na kraju, jer je $|OU|^2 = (R - \lambda\, r)^2$, zaključujemo da kružnica $m = h(u)$ doista dira iznutra opisanu kružnicu k trokuta ABC. Ona očito dira i pravce AB i AC jer točka U leži na simetrali kuta A (tj. na pravcu AI).

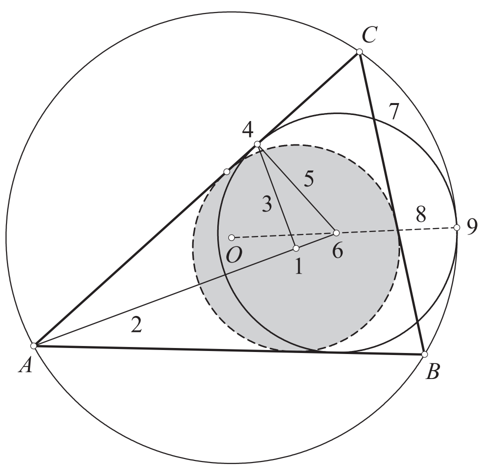
Za središte $I_a\left(\dfrac{(f+g)\,grf}{f\,g-1}, \dfrac{rg\,(f+g)}{f\,g-1}\right)$ pripisane kružnice nasuprot vrha A čiji polumjer je $r_a = \dfrac{rg\,(f+g)}{f\,g-1}$ vrijedi isti račun samo što je završna relacija jednaka $|OV|^2 = (R + \lambda\, r_a)^2$.

Neke posljedice

Budući da je $\lambda = \dfrac{2}{1+\cos A} = 2$ onda i samo onda ako je $\cos A = 0$ (tj. onda i samo onda ako je kut A pravi), vidimo da teorem 4 povlači da obrati teorema 1 i 2 također vrijede. Isto tako možemo karakterizirati trokute koji imaju u nekom vrhu kut od npr. 60° na sljedeći način.

Korolar 1. *Kut A u trokutu ABC jednak je 60° onda i samo onda ako je polumjer kružnice koja dotiče iznutra opisanu kružnicu k trokuta ABC i pravce AB i AC jednak $\frac{4}{3}$ polumjera njegove upisane kružnice.*

Jednostavne konstrukcije kružnica m i n

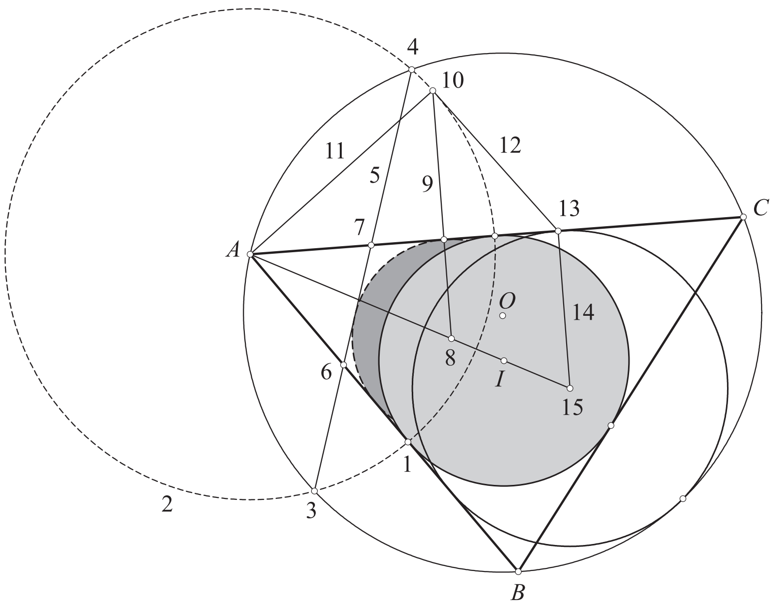


Slika 5. Konstrukcija kružnice m nasuprot vrha A u bilo kakvom trokutu ABC.

Na slici 5 prikazana je jednostavna konstrukcija kružnice m za vrh A. Prvo se odredi središte upisane kružnice 1 pa se ono spoji s točkom A. Na tu spojnicu 2 se u središtu upisane kružnice 1 podigne okomica 3 koja siječe pravac AC u točki 4. Okomica 5 na pravac AC u točki 4 siječe simetralu kuta A u središtu 6 tražene kružnice m. Njen polumjer je dužina $\overline{46}$ a točka 9, u kojoj iznutra dotiče opisanu kružnicu, dobiva se kao presjek s opisanom kružnicom spojnice središta O i točke 6. Konstrukcija kružnice n je vrlo slična i kreće od središta pripisane kružnice nasuprot vrha A umjesto središta upisane kružnice.

Konstrukcije kružnica m i n inverzijom

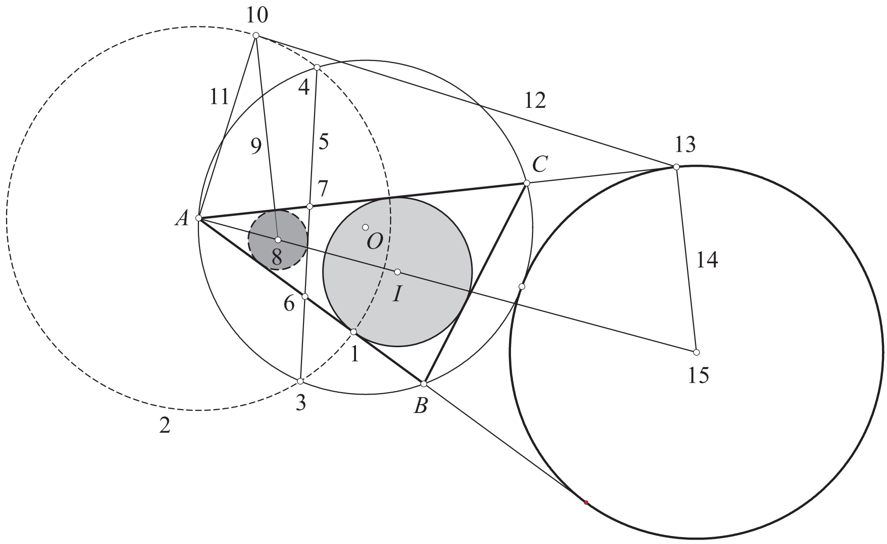
Jedna od učinkovitih metoda rješavanja Apolonijevog problema je primjena inverzije u odnosu na pogodno odabranu kružnicu (vidi [2, str. 188]).



Slika 6. Konstrukcija središta kružnice m inverzijom.

Na slici 6 prikazana je dosta složena konstrukcija središta kružnice m koja ima 15 koraka. Prvo se odredi točka u kojoj upisana kružnica dodiruje stranicu AB. Inverzija se provodi u odnosu na kružnicu sa središtem u točki A kroz tu dodirnu točku. Pravac 5 kroz točke 3 i 4 presjeka kružnice inverzije s opisanom kružnicom siječe pravce AB i AC u točkama 6 i 7. Tražena kružnica m je slika pripisane kružnice nasuprot vrha A trokuta $A67$ u toj inverziji.

Posljednja slika 7 prikazuje analognu konstrukciju središta kružnice n koja isto ima 15 koraka. Razlika je jedino u tome što je tražena kružnica n slika upisane kružnice trokuta $A67$ u istoj inverziji.



Slika 7. Konstrukcija središta kružnice n inverzijom.

Zaključak

Što smo sve mogli naučiti u ovom članku? Kao prvo, da ako neka tvrdnja (teorem 1) ima složeni dokaz poput rješenja Muminagića i Nykøbinga onda sigurno postoji još zamršeniji argument poput našeg s potencijom točke. Kao drugo, da ponekad metoda analitičke geometrije daje jednostavnije dokaze od čisto geometrijskih i da uvijek treba težiti prema što je moguće jednostavnijim argumentima jer nam oni obično pružaju najviše uvida u srž problema. Kao treće, da uvijek treba ići prema što je moguće većoj općenitosti jer i to obično daje najviše koristi i zadovoljstva.

Literatura

[1] A. Muminagić i F. Nykøbing, *En cirkel i den retvinklede trekant*, Matematik Magasinet **31** (2006), 849.

[2] Dominik Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb 1994.