Универзални природни облици

dr Leopold Verstraelen[5]

Увод

Заснована на нашим људским осећајима и перцепцијама „физичке геометрије коју доживљавамо у свету који нас окружује" и након дуге историје кроз коју је била експериментална наука у разним културама Земљине кугле, коначно, геометрија је утврђена као централна област математике у свету старих Грка [1, 2, 3, 4]. Према томе, уграђена у људској свести преко психолошки креиране хипотезе van Helmholtz-а о „свету који нас окружује и његовим садржајима" који су били и јесу настали у служби еволуције наше врсте и њених индивидуа, апстрактна геометрија је рођена и од тада се развија помоћу можданих конструкција. У почетку, она се у суштини састојала од геометрије Еуклидских 2D-равни и 3D-простора, са нагласком на сферама као веома значајним објектима у простору и на феномену перспективе. За сагледавање њеног домета у садашњем времену, видети [5, 6, 7, 8]. Још и данас, као што је формулисао Chern у свом Уводу за [6]:„*Док алгебра и анализа обезбеђују темеље математике, геометрија је у средишту*".

И као што је рекао Penrose:„*Постоји велика интеракција између деловања природног света и закона и осетљивости мишљења*" [9], тако да је корисно подсетити се његове сугестије да је „*свест, у суштини "виђење" неопходне истине;* и да *то може да представља неку врсту стварног контакта са Платоновим светом идеалних математичких појмова*" [10]. Према томе, не може бити изненађујуће то да „*најважнији и чврсто прихваћени делови нашег научног сазнања света укључују математичке моделе*", као што је тврдио Browder MacLane [11], или „*Математика је основа свег егзактног знања природних феномена*" што је поставио Hilbert [12]. Слично претходном, подсетимо се следећег запажања које је начинио Proclus и које је послужило као нека врста мотоа Кеплерове књиге „Хармонија света":„*У проучавању природе, највећи допринос дала је математика која открива хармонију мисли које сачињавају њену основу*".

Из Увода и Епилога „О расту и форми" [13] d'Arcy Thompson-а, наводимо редом следеће:„Потрага за разликама или фундаменталним контрастима између феномена органског и неорганског, живих и неживих ствари, окупирала је мисли многих људи, *док је тражење заједништва принципа или суштинских сличности било ношено од неколицине*... ствари живе и неживе, *ми становници света и овај свет у коме живимо слично су омеђени физичким и математичким законима*".

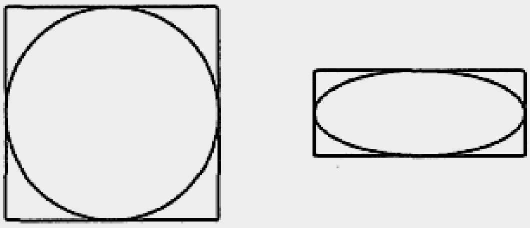
Намера ми је да покушам да покажем у овом раду да су кошнице пчела и шкољке, кристали и галаксије, DNK–молекули и цветови, стабла, ткива, поленов прах биљака, итд., као и сам релативистички простор–време универзум, у сагласности са сличним природним кривинским условима, и да сви они поседују облике са сличним геометријским формалним особинама. Дакле, у најмањем, по мом мишљењу, садржај овог рада је још једна илустрација тога да „*Природа воли да буде гледана очима и мозговима геометара*" [1]. У првом делу, полазећи од Lamé-ових кривих [14], дат је кратки преглед *Gielis-ових кривих, површи*

[5] K.U. Leuven - K.U. Brussel Center PADGE, (Pure and Applied Differential Geometry), Departement Wiskunde, Celestijnenlaan 200B, B 2001, Leuven, België

и трансформација за које се испоставило да прилично добро описују разноврсност облика или форми кривих и површи, а због тога такође оштије и подмногострукости произвољних димензија, које су или „регуларне“ или „део по део линеарне“, мењајући само неколико експонената или коефицијената у само једној формули. *„У природи влада хармонија“*, рекао је Питагора, *„јединство у њеној разноликости, и то има свој језик: бројеви су језик природе“.* И у другом делу, у оштем природном окружењу често трагајући за облицима и формама које одговарају једном или другом принципу оптимизације, видети референце [2, 3, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21], посебно заснованим на недавном заједничком раду са S. Haesen-ом, примећено је да су такође физичка простор–времена Friedmann-а и Lemaître-а, која су опште позната у вези са такозваном теоријом „великог праска“, описана у суштини помоћу истог типа геометријских формула. Садржај овог рада био је прво представљен у мојим предавањима *„О геометрији и природној филозофији“* одржаним на Универзитету у Крагујевцу и касније на Академији у Месини 2004. године, и у суштини тиче се рада [23] који сам имао задовољство да напишем заједно са Johan-ом Gielis-ом и Stefan-ом Haesen-ом.

1. О ГЕОМЕТРИЈИ „СВЕГА ШТО НАСТАЊУЈЕ СВЕТ“

Нека x и y означавају Декартове координате у равни $\mathbb{R}^2$. Тада је једаначина круга полупречника r чији је центар у координатном почетку 0 дата са $x^2 + y^2 = r^2$ и једначина елипсе са полуосама a и $b \neq a$, са центром у координатном почетку дата је са $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.

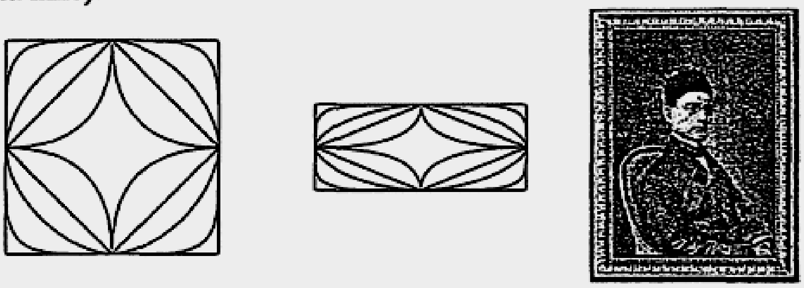


Слика 1: кругови и елипсе

Према Lamé-у, кругови и елипсе, исто као квадрати и правоугаоници, такође приказани на Слици 1, укључени су у фамилију такозваних „суперелипси“, тј. равних кривих датих Декартовим једначинама облика

$$\left|\frac{x}{A}\right|^p + \left|\frac{y}{B}\right|^p = 1, \tag{1}$$

(при чему је $p, A, B \in \mathbb{R}_0^+$; оба случаја $A = B = r$ и $A = a \neq b = B$ су дакле добијена помоћу исте једначине).

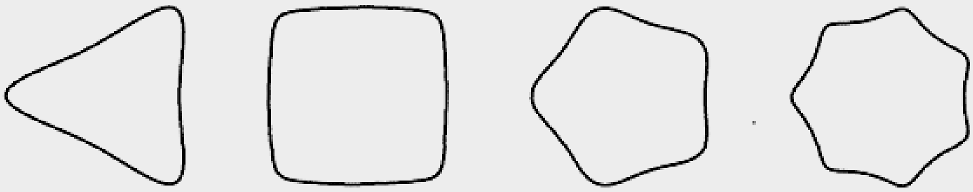


Слика 2: суперкругови и суперелипсе Lamé-а

Преласком на *поларне координате* ρ и θ, тако да је $x = \rho \cdot \cos\theta$ и $y = \rho \cdot \sin\theta$, где уз то уводећи коефицијент $\frac{m}{4}$ (који допушта увођење специфичнијих ротационих симетрија око 0 од оних које се односе на 4 квадранта Декартовог координатног система) и где штавише давањем „независности" експонентима који се појављују у три члана једначине (1), ова једначина постаје

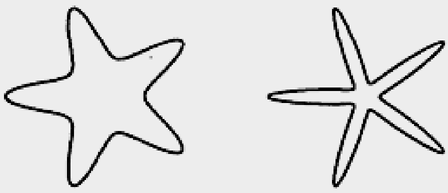
$$\rho = \left\{ \left| \frac{\cos\frac{m\theta}{4}}{A} \right|^{n_2} + \left| \frac{\sin\frac{m\theta}{4}}{B} \right|^{n_3} \right\}^{-1/n_1}, \tag{2}$$

(при чему $n_1 \in \mathbb{R}_0$, $n_2, n_3 \in \mathbb{R}$). Неки примери, у извесној мери, равних кривих датих помоћу поларне једначине (2), при чему је овде у сваком од случајева $A = B$ и за које је даље респективно, у случају (а): $m = 3, n_1 = 4,5$ и $n_2 = n_3 = 10$, у случају (б): $m = 4, n_1 = 12$ и $n_2 = n_3 = 15$, у случају (в): $m = 5$ и $n_1 = n_2 = n_3 = 4$ и у случају (г): $m = 7, n_1 = 10$ и $n_2 = n_3 = 6$, приказани су на следећој слици.



Слика 3: криве (а), (б), (в) и (г) дате једначином (2)

Ове криве прилично тачно описују облике од Nuphar luteum petiole (а) и стабла од Scrophularia nodosa (б), Equisetum (в) и Raspberry (г), респективно. Слично, на пример различите врсте морских звезда одговарају кривама датим помоћу једначине (2) за $A = B$ и даље, респективно у случају (д): $m = 5, n_1 = 2$ и $n_2 = n_3 = 7$, и у случају (ђ): $m = 5$, $n_1 = 2$ и $n_2 = n_3 = 13$.

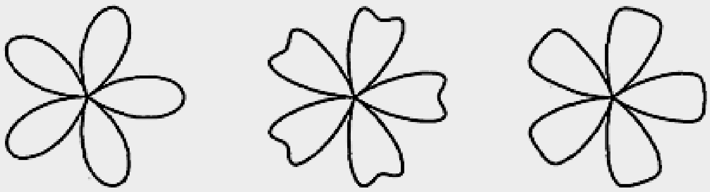


Слика 4: криве (д) и (ђ) дате помоћу једначине (2)

Равне криве дате помоћу поларне једаначине (2) могу се у извесном смислу интерпретирати тако као да су добијене полазећи од *јединичног круга са центром у* 0 ($\rho = 1$) помоћу *трансформације* задате десном страном једначине (2), (за било који избор параметара A, B, m, n_1, n_2, n_3). И слично, уместо трансформисања овог јединичног круга, све равне криве одређене помоћу поларних једначина $\rho = f(\theta)$, (где f у основи може бити произвољна позитивна реална функција), могу дакле бити трансформисане у равне криве чије су поларне једначине

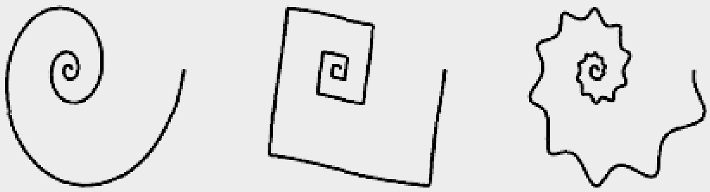
$$\rho = f(\theta) \cdot \left\{ \left| \frac{\cos\frac{m\theta}{4}}{A} \right|^{n_2} + \left| \frac{\sin\frac{m\theta}{4}}{B} \right|^{n_3} \right\}^{-1/n_1}. \tag{3}$$

Следеће фигуре, у некој мери, показују у случајевима (б) и (в) такве трансформације са параметрима $m = 2,5, n_1 = \frac{1}{1,3}, n_2 = n_3 = 2,7$ и, $m = 2,5, n_1 = n_2 = n_3 = 5$, респективно ружа–криве Grandi-ja (а) чија је једначина $\rho = f(\theta) = \cos(2,5\theta)$ у „супер-руже".



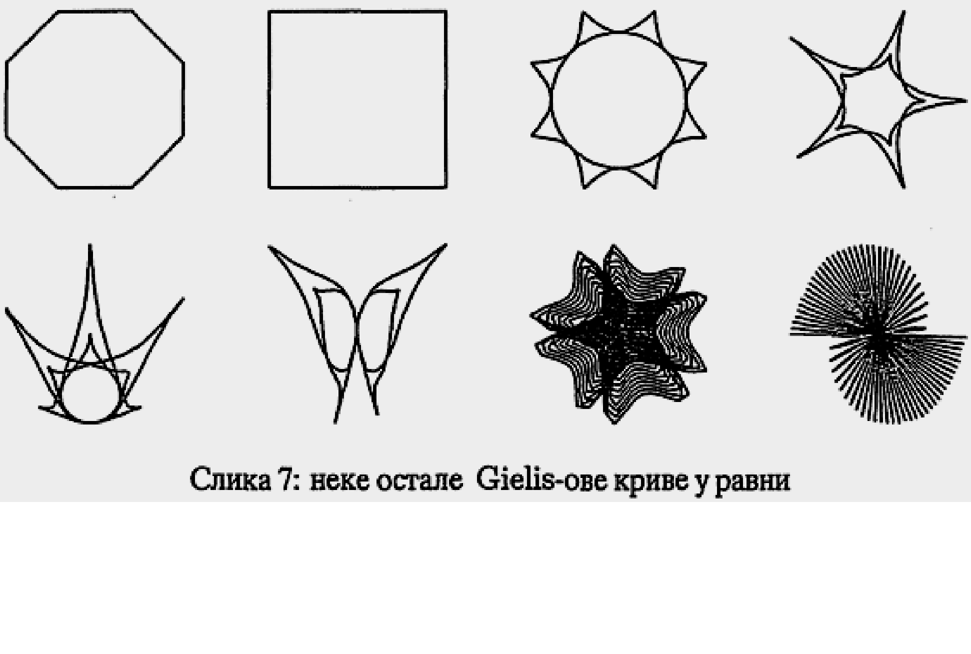
Слика 5: ружа–крива (а) и две одговарајуће супер–руже (б) и (в)

Полазећи на пример од *логаритамске спирале* (а) $\rho = f(\theta) = e^{0,2\theta}$, помоћу трансформације (3) са параметрима $m = 4$ и $n_1 = n_2 = n_3 = 100$ у случају (б) и $m = 10$ и $n_1 = n_2 = n_3 = 5$ у случају (в), респективно, у некој мери, добијене су следеће *„суперспирале"*.

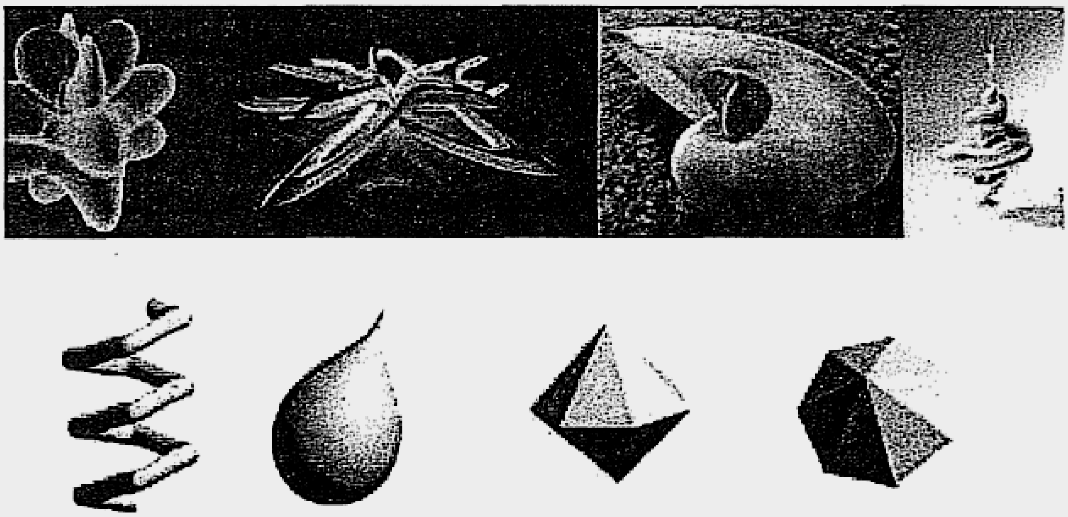


Слика 6: логаритамска спирала (а) и две одговарајуће суперспирале (б) и (в)

Оно што је претходно укратко речено и односи се на криве у *2D-равнима* може се лако проширити на *криве и површи у 3D-просторима*, (и према томе на подмногострукости било којих димензија и кодимензија). Уместо суперкругова и суперелипси сада се разматрају *„суперсфере"* и *„суперелипсоиди"*. И као у случају равних кривих, такође за просторне криве и површи у простору, *геометријске трансформације* добијене по аналогији са формулама (2) и (3), обезбеђују *изједначавање широких класа природних и апстрактних облика*.



Слика 7: неке остале Gielis-ове криве у равни



Слика 8: неке Gielis-ове површи у 3D-простору

За више детаља и бројне примере природних облика који се појављују код животиња и биљака, њихових ћелија и ткива, код снежних пахуљица и паукових мрежа, кристала и струјања флуида, итд., и који су веома коректно описани помоћу таквих трансформација, директно помоћу само једне од њих, или индиректно помоћу извесне природне комбинације од њих неколико, видети [24, 25, 26, 27, 28, 29]. Према Piet Hein-у, у овим публикацијама Johan Gielis и његов сарадник Bert Beirinckx употребили су термин „*суперформула*“ за једначине и трансформације облика (2) и (3). Посебно, у [27], почеци претходних разматрања потичу од Piet Hein-ових „суперјаја“ (ротационих „суперелипсоида“) као извора инспирације у покушају да се геометријски опишу облици равних пресека бамбусових стабала.

Слика 9: Piet Hein и „четвртасти“ бамбус

Такође, на пример у [13, 25] за такве „суперформе“ које се појављују у 2D-равнима и 3D-просторима, дискутовани су аргументи који се односе на разне законитости природних оптимизација, прецизније у вези са њиховим геометријским облицима. Коначно, приметимо да 2D- и 3D- хиперболичке верзије горње суперформуле елиптичког типа такође заслужују да буду озбиљно разматране.

2. О ГЕОМЕТРИЈИ „СВЕТА У КОМЕ СЕ НАЛАЗИМО“[6]

Сада желимо да покажемо да је као и код *кривих* и *површи* датих помоћу формула као што су претходне, које са чисто геометријске тачке гледишта задовољавају природне услове својих кривина и које се природно појављују

[6]Остатак текста захтева мало веће математичко знање, али се надамо да ће вам бар неки његови делови бити разумљиви и инересантни.

у световима физике, хемије, геологије, биологије,... и према томе, такође у световима уметности и технологије, од свих могућих „ствари“ такође и наш *релативистички простор–време универзум* у основи одређен помоћу сличних кривинских услова који су описани помоћу сличних формула.

Физичка простор–времена која представљају *идеалне подмногострукости* у смислу Chen-а [16, 17, 30] скорије су разматрана на пример у [31, 32]. Према томе, специјално неки *простор–време модели Georges-а Lemaître-а* (у литератури такође реферисани као Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker-ова простор-времена) показују се изванредним као идеалне хиперповрши у просторима Minkowski-ог. Ова простор–времена су такође у основи такозваних теорија „великог праска“. Према овоме, и још адекватније, сам Lemaître је употребљавао термине као сто су „примитивни атом“ и „космичко јаје“, при чему последњи даје најлепшу представу „почетка живота нашег космоса“.

Са формалне тачке гледишта, Robertson–Walker-ова метрика у $\mathbb{R}^4$ дата је у локалним координатама (x, y, z, t) са

$$(4)\quad ds^2 = -dt^2 + \left\{c(t)\cdot\left[1+\frac{k}{4}(x^2+y^2+z^2)\right]\right\}^{-2}\cdot(dx^2+dy^2+dz^2),\quad (k=+1,0,-1),$$

при чему су простор–комади целог простор–времена за било које дато време t *Riemann-ови 3D-простори константне кривине* $c(t)$. Помоћу визуелизације у 2D- чешће него у 4D-репрезентацији, овакве метрике су на пример метрике обртних површи у 3D-просторима; (за прелазак са геометрије оваквих површи на Riemann-ову геометрију општих савијених производа, видети [34]). Трансформације равне Еуклидске 3D-Питагорине метрике $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ у 3D-метрику произвољне константне кривине множењем одговарајућим функцијама у основи потичу од Riemann-а и von Helmholtz-а у њиховим проучавањима основа геометрије преко, што су они то достигли респективно, хипотеза и чињеница [35, 36]. Имајући у виду то да је *Riemann-ова геометрија централно поље проучавања у геометрији у целом* [6, 7, 37], изгледа вредно да се с времена на време подсетимо оба ова сјајна текста, посебно у складу с почецима геометрије као области математике која се заснива на физичким геометријским искуствима која људска бића имају захваљујући њиховим визуелним и осталим осећајима и перцепцијама. У простор–време метрикама као (4) могу се уочити, с једне стране, конформне деформације равних простор–метрика у метрике константне просторне кривине ($=, <$ или > 0) које се могу променити у току времена, и с друге стране, у временском правцу, хиперболичко увртање (које даље може да укључи и брзину светлосне нормализације), који све у свему представљају *формалне деформације Питагорине теореме сасвим налик претходним супертрансформацијама које делују на једначине Еуклидских кругова или сфера.* У овом контексту, приметимо још да је у вези такозваних суперкругова, у једном од својих првих предавања, Riemann експлицитно споменуо геометријску тангентну 2D-индикатрису $x^4+y^4 = 1$ као релевантно проширење Еуклидског круга $x^2 + y^2 = 1$, мислећи притом на специјалне Riemann–Finsler-ове метрике

$$ds = \left\{\sum_{i=1}^{n}(dx^i)^p\right\}^{-1/p};$$

(у вези недавног рада Chern-а који се односи на Riemann–Finsler-ову геометрију и Miron-а на Lagrange-ову геометрију, оба у вези са Hilbert-овим варијационим проблемом 23, видети на пример [6, 12]). Можемо се подсетити на пример да се *обртне површи Delaunay-а*, тј. оне са константном средњом кривином H, (равни и катеноиди за $H = 0$, сфере и кружни цилиндри и „андулоиди“ и „нодоиди“ за $H \neq 0$), заиста појављују ефективно у разним областима природних наука. Геометријски природни кривински услови који алудирају претходном разматрању и односе се, с једне стране, у својој најједноставнијој форми, на *константност кривина* као што је *средња кривина* H (која изражава униформну тензију површи) или *Gauss-ова кривина* K (за површи M у рецимо Еуклидском 3D-простору, или слично, секционална кривина K за опште Riemann-ове просторе, чија константност као што је показано од стране Riemann-а и von Helmholtz–Lie-а значи да је задовољена „аксиома слободног кретања“), представљају према томе реализовања основних симетрија или пак класичних варијационих оптимума. С друге стане, геометријски природни кривински услови споменути малопре односе се на реализацију једнакости у *оптималним неједнакостима* које важе између разних скаларних функција кривина свих подмногострукости. Посебно, такве неједнакости дају тачне релације између кривина које се фундаментално односе на *унутрашњу природу* ових подмногострукости (као што су њихове секционалне кривине, њихова скаларна Riemann-ова кривина τ која представља просечну вредност секционалних кривина, и много општије, све њихове недавно уведене *Chen-ове кривине* [16, 17], које заједно дају слично као DNK-структуру разматраних Riemann-ових многострукости) и кривине које се фундаментално односе на облик за који се ове подмногострукости претпостављају да имају у њиховом околном свету, тј. *спољашње кривине* (изражене помоћу друге фундаменталне форме h и нормалног тензора кривине $\mathbb{R}^{\perp}$ од којих је најосновнија *квадраш средње кривине* H^2, која изражава тензију површине подмногострукости). За све површи M у Еуклидском 3D-простору, још је Euler показао да је увек испуњено $K \leqslant H^2$ свуда на M, и једнакост важи у свакој тачки ако и само ако је, према теореми Meusnier-а, M равна или сферична површ. Такозване *Chen-ове неједнакости* уопштавају ову Euler-ову неједнакост у смислу димензија и кодимензија подмногострукости које се разматрају, врсте амбијентних простора, као и врсте унутрашњих и спољашњих кривина које се посматрају. За подмногострукост се каже да је *идеална подмногострукост* у неком простору уколико она заиста у свакој од својих тачака реализује једнакост у таквој општој неједнакости. Имајући у виду њихове унутрашње структуре, које подмногострукости природно теже да их не мењају, идеалне подмногострукости се према томе суочавају са најмањом могућом спољашњом кривином која им се може наметнути обликом који оне заузимају у околним световима, више у неком смислу поседовања најмањег могућег унутрашњег напона којим животни услови у тим амбијентним просторима утичу на подмногострукости, створења којима се догодило да живе у овим световима. И као што јесте, наиме, као и идеалне Lorentz-ове хиперповрши у просторима Minkowski-ог, такође специјално и Lemaître-ови универзуми природно се појављују на пример у [32]. Кривински услови на подмногострукостима које смо претходно дискутовали, као што су *константности* или инваријантност извесних кривина и *Chen-ове неједнакости*, исто тако као и остали природни кривински услови, на пример *Willmore-ови услови*, итд., сви они на неки начин изражавају варијационе принципе на начин на који су проучавани од d'Arcy Thompson-а у [13].

Литература

[1] L. Verstraelen, *The geometry of eye and brain*, Soochow Journal of Mathematics 30 (2004) (volume in honour of Professor Bang-Yen Chen), 367-376.

[2] J.L. Coolidge, *A history of geometrical methods*, Dover Publ., London (1963).

[3] J. Bronowski, *The ascent of man*, Litte, Brown and Co, Boston (1973).

[4] A. Lejeune, *Euclide et Ptolémée, deux stades de l'optique géométrique grecque*, Université de Louvain, Bureau du "Recueil" (1948).

[5] P. Montel e.a. (eds.), *Encyclopédie française*, Tome 1, Larousse, Paris (1937).

[6] F. Dillen and L. Verstraelen (eds.), *Handbook of differential geometry*, North-Holland, Amsterdam, Vol. 1 (2000) and Vol. 2 (to appear).

[7] S.S. Chern, W.H. Chen and K.S. Lam, *Lectures on differential geometry*, World Scientific, Singapore (1999).

[8] W. Kühnel, *Differential geometry: curves-surfaces-manifolds*, AMS-Student Math. Library, vol. 16 (2002).

[9] R. Penrose, *The geometry of the universe*, in *Mathematics Today* (ed. L.A. Steen), Vintage Books, New York (1980).

[10] R. Penrose, *The emperor's new mind; concerning computers, minds and the laws of physics*, Oxford University Press, Oxford (1989).

[11] F.E. Browder and S. Mac Lane, *The relevance of mathematics*, in *Mathematics Today* (ed. L.A. Steen), Vintage Books, New York (1980).

[12] D. Hilbert, *Mathematical problems (1900 - Paris - Lecture)*, AMS-Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 28 (1976).

[13] W. d'Arcy Thompson, *On growth and form*, Cambridge University Press, Cambridge, 1917.

[14] G. Lamé, *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie*, Hermann, Paris 1818.

[15] A.C. Thompson, *Minkowski geometry*, Encyclopedia of mathematics and its applications, Vol. 63, Cambridge University Press, Cambridge (1996).

[16] B.-Y. Chen, *What can we do with Nash's embedding theorem?*, Soochow Journal of Mathematics 30 (2004), 303-338.

[17] B.-Y. Chen, *Riemannian submanifolds*, in [6, Vol. 1].

[18] S. Hildebrandt and A. Tromba, *Panoptimum*, Spektrum, Heidelberg (1986).

[19] T.J. Willmore, *A survey on Willmore immersions*, in *Geometry and Topology of submanifolds*, Vol. IV, (eds. F. Dillen and L. Verstraelen), World Scientific, Singapore (1992).

[20] B.-Y. Chen, *Total mean curvature and submanifolds of finite type*, World Scientific, Singapore (1984).

[21] M. Barros, *The conformal total tension variational problem in Kaluza-Klein supergravity*, Nuclear Physics B 535 (1998), 531-551.

[22] M. Barros, *Willmore-Chen branes and Hopf T-duality*, Class. Quantum Grav. 17 (2000), 1979-1988.

[23] J. Gielis, S. Haesen and L. Verstraelen, *Universal natural shapes; from the supereggs of Piet Hein to the cosmic egg of Georges Lematre*, Kragujevac Journal of Mathematics, (to appear).
[24] J. Gielis, *A generic transformation that unifies a large number of natural and abstract shapes*, American Journal of Botany 90 (2003), 333-338.
[25] J. Gielis, *Inventing the circle*, Geniaal Press, Antwerpen (2003).
[26] J. Gielis and T. Gerats, *A botanical perspective on plant shape modeling*, Proc. International Conference on Computing, Communications and Control Technologies, Vol. VI (2004), 265-272.
[27] J. Gielis, *Wiskundige supervormen bij bamboes*, Newsletter Belgian Bamboo Society 13 (1996), 20-26.
[28] J. Gielis, B. Beirinckx and E. Bastiaens, *Superquadrics with rational and irrational symmetries*, Proc. 8th ACM symposium on Solid Modeling and applications (2003), 262-265.
[29] J. Gielis, *Variational superformula curves for 2D- and 3D graphic arts*, Proc. World Multi-Conference on Systemics, Cybernetics and Informatics, Vol. V : Computer Science and Engineering (2004), 119-124.
[30] S. Haesen, A. Šebeković and L. Verstraelen, *Relations between intrinsic and extrinsic curvatures*, Kragujevac J. Math. 25 (2003), 139-145.
[31] F. Dillen, S. Haesen, M. Petrović-Torga vsev and L. Verstraelen, *An inequality between intrinsic and extrinsic scalar curvature invariants for codimension 2 embeddings*, J. Geom. Phys. 52 (2004), 101-112.
[32] S. Haesen and L. Verstraelen, *Ideally embedded space-times*, J. Math. Phys. 45 (2004), 1497-1510.
[33] G. Lemaître, *Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant, rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactique*, Annales Soc. Sc. Bruxelles 47 (1927), 49-59.
[34] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry, with applications to relativity*, Acad. Press, New York (1983).
[35] H. von Helmholtz, *Ueber die Tatsachen welche der Geometrie zu Grunde liegen*, e.g. in *Abhandlungen zr Philosophie und Geometrie*, Junghaus, Cuxhausen (1987).
[36] B. Riemann, *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*, e.g. in *Gaussche Flchentheorie, Riemannsche Rume und Minkowski-Welt*, Teubner, Leipzig (1984).
[37] M. Berger, *A panoramic view of Riemannian geometry*, Springer, Berlin, 2003.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2004/05 година