Ристо Малчески
Скопје

МАТЕМАТИЧКИ ИГРИ II

(продолжение)

7. ПОБЕДУВА ТОЈ ШТО ЌЕ ЗЕМЕ ПОСЛЕДЕН

Во три кутии A,B и C се наоѓаат топчиња и тоа: во кутијата A се 2, во кутијата B се 3 и во кутијата C се 4 топчиња. Двајца играчи ја играат следната игра: наизменично земаат од произволна кутија произволен број топчиња. Победник е оној играч по чие земање сите кутии остануваат празни. Како треба да игра првиот играч за сигурно да го победи својот противник?

Решение. Првиот играч треба да земе 3 топчиња од кутијата C, така што после неговиот прв потег во кутиите остануваат 2, 3 и 1 топче. Како и да постапи понатаму вториот играч, со вториот потег првиот играч секогаш може да обезбеди едната кутија да е празна, а во останатите две кутии да остане еднаков број топчиња, што му обезбедува да ја добие играта.

8. ПОБЕДУВА ПАРНИОТ БРОЈ

Од 27 чкорчиња што се наоѓаат на маса, двајца играчи наизменично земаат најмалку едно, а најмногу четири. Победува оној што на крајот има парен број чкорчиња.

Дали може еден од играчите да игра така што во секој случај да ја добие играта, без разлика како постапува неговиот противник?

Решение. Првиот играч може да победи ако постапи на следниот начин: при првиот потег зема само 2 чкорчиња. Потоа, секогаш кога неговиот противник ќе земе парен број чкорчиња, и самиот ќе земе толку чкорчиња, така што на неговиот противник ќе му останат 19, 13 или 7 чкорчиња; а ако кај неговиот противник се најдат напарен број чкорчиња тој нему ќе му остави 23, 17, 11 или 5 чкорчиња; а ако тоа се покаже невозможно, тогаш ќе му остави 24, 18, 12 или 6 чкорчиња.

9. ИГРА НА СРЕЌА

Трајан шетајќи по улица забележал една игра на среќа која што се состои во следното. Еден кружен диск е поделен на десет еднакви дела, што се означени со броевите 1, 2, ..., 10. Гледачот што сака да учествува во играта треба да плати извесна сума пари по своја желба. Тој завртува едно топче во круг, па ако топчето застане кај бројот 10, тогаш играчот добива двојно поголема сума на пари од таа што ја вложил. Во спротивен случај ништо не добива.

Со каква стратегија треба да игра Трајан за сигурно да има добивка, претпоставувајќи дека Трајан со себе носи пари во доволна количина, и дека по конечен број на свртувања топчето ќе застане на бројот 10.

Решение. Едно од можните решенија е следното. Трајан најпрво вложува еден денар. Ако погоди 10, тогаш заработува еден денар. Да претпоставиме дека при првата проба Трајан губи. Вториот пат Трајан вложува 2 денари. Ако погоди 10 ќе добие 4 денари, а вложи 1+2=3 денари, па заработува еден денар. Да претпоставиме дека и вториот пат Трајан губи. Третиот пат Трајан вложува 4 денари (двојно повеќе од претходниот пат). Ако погоди 10 тој ќе добие 8 денари, а вложил 1+2+4=7 денари, па повторно еден денар е во добивка. Трајан ја продолжува играта вложувајќи:

$$8=2^3, 16=2^4, 32=2^5, \dots 8=2^3 \text{ денари},$$

и игра се додека не добие погодок. Тоа ќе се постигне по конечен број на проби, и на крај ќе заработи еден денар. Навистина ако тој игра n пати, тој вложил

$$1+2+2^2+\dots+2^n=(2-1)(1+2+2^2+\dots+2^n)=2^{n+1}-1 \text{ денари},$$

а ќе добие 2^{n+1} денари, па 1 денар е во добивка.

Други можни решенија се ако Трајан последователно вложува

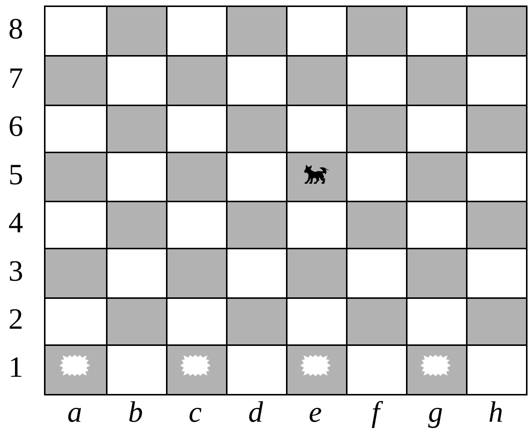
$$1, 3, 3^2, \dots, 3^n \text{ или } 1, 4, 4^2, \dots, 4^n \text{ итн денари.}$$

Во овие случаи заработката е далеку поголема, но затоа пак Трајан треба да носи со себе голема сума пари.

10. ВОЛКОТ И ОВЦИТЕ

На шаховска табла поставена обично како за игра, на црните полиња од првиот ред се поставуваат четири бели жетони и тие во оваа игра ќе претставуваат “овци”. Освен тоа, на било кое друго црно поле е поставен црн жетон, кој ќе го претставува “волкот”. Се игра на тој начин што волкот и по една од овците се движат од полето на кое се наоѓаат на првото соседно црно поле, и тоа овците одат само напред полулево или полудесно, а волкот било напред било назад полулево и полудесно.

Во оваа игра волкот не може да “изеде” ниедна овца. Тој победува ако движејќи се на предвидениот начин успее да се пробие меѓу овците и да стигне на првиот ред на шаховската табла, од кој ред тргнуваат овците. Овците пак победуваат ако успеат да го заобиколат волкот така што тој да не може да оди никаде. Докажете дека овците можат да го победат волкот.



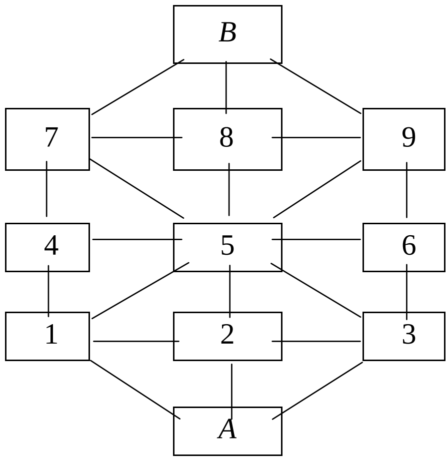
Решение. Најпрвин треба да ги проучиме сите состојби во кои може да се најдат волкот и овците. Ќе тргнеме од следното: ако овците успеат постепено да ги зафатат сите црни полиња на вториот, третиот итн. ред и притоа постојано да го потиснуваат волкот station наназад, тој на крајот ќе се најде на осмиот ред и тогаш нема каде да се движи. Притоа, може да се случи волкот и порано да биде опколен од овците, па со ваква стратегија сигурно ќе загуби. Според тоа, треба да видиме што треба да прават овците, за да постепено напредуваат, а притоа волкот нивниот “фронт” да не го пробие. Во многу случаи тоа не е тешко да се констатира. Меѓутоа, овде ќе укажеме на еден случај во кој овците можат лесно да згрешат.

Ако волкот на почетокот на играта се постави на полето $a3$ или на полето $g3$, тогаш со поместување на овцата $a1$ на $b2$, односно $e1$ на $f2$ волкот ќе биде оневозможен останатите овци да ги попречува во нивното напредување. Исто така, ако волкот се постави на полето $e3$, по поместувањето на овцата од $c1$ на $d2$, волкот ќе биде оневозможен да го попречи напредувањето на овците. Но, ако волкот се постави на полето $c3$, тогаш на прв поглед изгледа дека во секој случај може да победи.

Навистина, ако во овој случај овците почнат да се движат онака како што, со оглед на распоредот на црните полиња изгледа најприродно, т.е. напред и десно, ќе се покаже дека волкот може да се пробие меѓу нив, без разлика по кој редослед ќе се врши поместувањето на овците. Но, ако прво се изврши поместување на овцата $g1$ на $f2$, тогаш волкот може освен ако не се реши на сосема некорисен потег да се врати назад, да се помести или од $c3$ на $b2$, или од $c3$ на $d2$. Но, во овој случај ако овците не направат грешка, ќе преминат на следниот ред.

11. ТРИ НА ЕДЕН

За оваа игра потребна е следната шема:



Играат двајца, еден со три бели фигури, другиот со една црна фигура. На почетокот на играта белиот ги става своите фигури на полињата *A*, 1 и 3. Црниот ја става својата фигура на полето 5. Белиот ја почнува играта и потезите се влечат наизменично. Белите фигури можат да се движат по едно поле хоризонтално, вертикално или дијагонално, но само на слободните места напред или странично, црната фигура може да се движи исто така, но таа може да се движи и назад. Белиот ја добива играта ако го блокира црниот, така што овој да не може да повлече потег. Црниот ја добива играта ако успее да дојде зад белите фигури или ако на таблата се повтори распоредот на сите фигури. Со разгледување на можните позиции на едниот и другиот играч може да се констатира дека црниот ја добива играта, ако самиот не згреши. Да се докаже ова тврдење.

Решение: На почетокот да констатираме дека играта мора да заврши по конечен број потези. Имено, може да се покаже дека трите бели фигури можат да бидат распоредени на таблата на 165 начини. За секој ваков распоред црната фигура може да биде поставена на едно од останатите осум полиња, па значи вкупниот број распореди на фигурите на шемата е $165 \cdot 8 = 1320$. Според тоа, играта мора да заврши по најмногу 1320 потези.

Почнувајќи ја играта белиот е принуден својата фигура од полето *A* да ја помести на полето 2, означуваме $A\to 2$. Не се можни потезите $1\to 4$ или $3\to 6$, бидејќи црниот веднаш ќе игра $5\to 1$, односно $5\to 3$ и така ја обезбедува победата. Навистина, белиот не смее да ја помести фигурата од полето *A*, а со двете фигури блокирањето е невозможно (од секое поле има најмалку три излези). Од друга страна, црниот има повеќе можности за својот прв потез. Една од нив е да кажеме 5→6. Белиот повторно нема избор и мора да игра 2→5 или 1→5. Потоа следува потегот 6→9. Сега е моментот кога се решава партијата. Ако белиот го повлече потегот 1→4, тогаш црниот не смее да се врати на полето 6, бидејќи по потегот 4→7 тој ја губи партијата на следниов начин: црниот го повлекува потегот 6→9, белиот потегот 3→6. Ако црниот го повлече потегот 9 → 8, тогаш белиот го повлекува потегот 6→9, па по 8→*B* следува 5→8. Ако црниот го повлече потегот 9→ *B*, тогаш белиот игра 5→9, па по *B*→8 следува 6→5 и црниот ја губи партијата. Според тоа, ако белиот го повлече потегот 1→4, тогаш црниот треба да игра 9→8 или 9→*B*. Нека повлечениот потег е 9→8. Сега белиот може да игра 4→7 или 3→6, да кажеме дека е повлечен потегот 3→6. Црниот не смее да повлече ниеден од потезите 8→7 или 8→9, бидејќи тогаш белиот со потезите 6→9 или 4→7, соодветно, ќе има добиена позиција. Значи единствен потез на црниот е 8→ *B*. Белиот може да игра кој и да е од следните потези 4→7, 5→8 или 6→9, на кои црниот одговара со потезите *B*→9, *B*→7, (*B*→9) или *B*→7, соодветно. Потоа белиот е принуден да игра еден од потезите 7→ 8, 6→5, (4→5) или 9→8. Сега црниот се повлекува на полето 9, после што неминовно се повторува распоредот на фигурите и црниот ја добива играта.

12. КРУКЧИЊА И КРВЧИЊА

Оваа игра меѓу децата е позната како “икс окс”.

Играта се игра на следниот начин. Нацртан е квадрат и истиот е поделен на 9 еднакви квадратни полиња. Потоа двајца играчи, наизменично, обележуваат секој со свој знак (на пример: крукче или крвче) по едно од деветте полиња, а победник е оној што прв ќе успее три негови знаци да се најдат на иста права (хоризонтално, вертикално или дијагонално). Докажете како треба да постапи секој од играчите, за оваа игра, без разлика како ќе постапи неговиот противник, да заврши ако не со негова победа, тогаш барем нерешено.

Решение. Стратегијата за да не се загуби е претставена на следните три цртежи, во кои првиот играч започнува во центарот, во аголно поле и во средно рабно поле.

O_2	X_7	O_6
O_4	X_1	X_3
X_5	O_8	X_9

X_1	O_6	X_5
X_3	O_2	O_8
O_4	X_7	X_9

X_3	X_1	O_4
O_6	O_2	X_7
X_5	X_9	O_8

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус на СММ