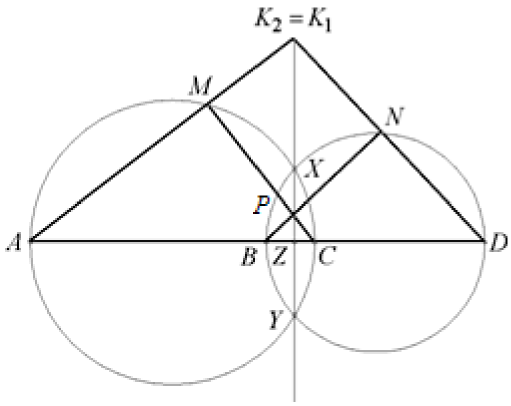
XXXVI олимпијада

1. Нека A,B,C и D се четири различни точки од дадена права, во тој редослед. Кружниците со дијаметри AC и BD се сечат во точките X и Y. Правата XY ја сече BC во точка Z и P е точка на правата XY различна од Z. Правата CP ја сече кружницата со дијаметар AC во точките C и M, а правата BP ја сече кружницата со дијаметар BD во точките B и N. Докажи дека правите AM, DN и XY се сечат во една точка.

Решение. *Прв начин.* Нека $K_1 = DN \cap XY,\quad K_2 = AM \cap XY$. Триаголникот BDN е правоаголен и $\measuredangle DNB = 90^\circ$. Од сличноста на триаголниците PBZ и DK_1Z следува



$$\frac{\overline{K_1Z}}{\overline{BZ}} = \frac{\overline{DZ}}{\overline{PZ}}, \text{ т.е. } \overline{K_1Z} = \frac{\overline{BZ}\cdot\overline{DZ}}{\overline{PZ}}$$

и аналогно од сличноста на триаголниците PCZ и AK_2Z следува

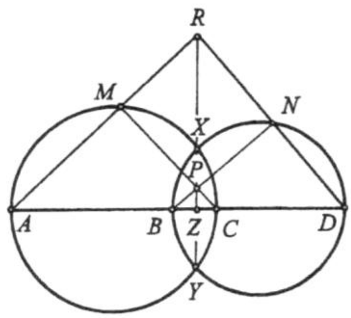
$$\frac{\overline{K_2Z}}{\overline{CZ}} = \frac{\overline{AZ}}{\overline{PZ}}, \text{ т.е. } \overline{K_2Z} = \frac{\overline{AZ}\cdot\overline{CZ}}{\overline{PZ}}.$$

Бидејќи триаголниците ACX и BDX се правоаголни, со примена Евклидовите теореми добиваме

$$\overline{AZ}\cdot\overline{CZ} = \overline{ZX}^2 = \overline{BZ}\cdot\overline{DZ},$$

па затоа $\overline{K_1Z} = \overline{K_2Z}$, т.е. $K = K_1 = K_2$ и $K = AM \cap DN \cap XY$.

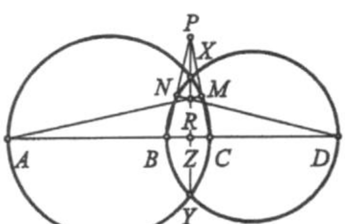
Втор начин. Тврдењето е тривијално ако P се совпадне со X или Y. Затоа да претпоставиме дека $P \neq X$ и $P \neq Y$. Од



$$\overline{PB}\cdot\overline{PN} = \overline{PX}\cdot\overline{PY} = \overline{PC}\cdot\overline{PM}$$

следува дека чеѣтириаголникот $BCNM$ е тетивен. Ако P припаѓа на отсечката XY (цртеж десно), тогаш и

$$\measuredangle MAD + \measuredangle MNB + \measuredangle BND = \measuredangle MAD + \measuredangle MCA + \measuredangle AMC = 180^\circ.$$



Ако P не припаѓа на отсечката XY (цртеж лево), тогаш

$$\begin{aligned}\measuredangle MAD &= 180^\circ - \measuredangle AMC - \measuredangle MCA\\ &= 180^\circ - \measuredangle BND - \measuredangle PNM\\ &= \measuredangle MND.\end{aligned}$$

И во двата случаја четириаголникот $ADNM$ е тетивен. Нека AM и DN се сечат во точката R. Нека правата RX ја сече првата кружница во точката Y_1, а втората во точката Y_2. Тогаш

$$\overline{RX}\cdot\overline{RY_1}=\overline{RA}\cdot\overline{RM}=\overline{RD}\cdot\overline{RN}=\overline{RX}\cdot\overline{RY_2}\,.$$

Оттука следува $Y_1\equiv Y_2\equiv Y$ и всушност R припаѓа на правата XY.

2. Нека $a\,,b\,,c\in\mathbb{R}^+$ се такви што такви што $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}\,.$$

Решение. *Прв начин*. Нека $x=\frac{1}{a}$, $y=\frac{1}{b}$ и $z=\frac{1}{c}$. Тогаш, $xyz=1$ и

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\,.$$

Десната страна на неравенството да ја означиме со S. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\begin{aligned}[(y+z)+(z+x)+(x+y)]S&=x^2+y^2+z^2+(x^2\tfrac{z+x}{y+z}+y^2\tfrac{y+z}{z+x})+\\&\quad+(y^2\tfrac{x+y}{z+x}+z^2\tfrac{z+x}{x+y})+(z^2\tfrac{y+z}{x+y}+x^2\tfrac{x+y}{y+z})\\&\geq x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx\\&=(x+y+z)^2\end{aligned}$$

односно $S\geq\frac{x+y+z}{2}$. Повторно од неравенствот меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме $S\geq\frac{x+y+z}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{x+y+z}{3}\geq\frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz}=\frac{3}{2}$, при што знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=1$, односно ако и само ако $a=b=c=1$.

Втор начин. Поопштото неравенство

$$\frac{a^k}{b+c}+\frac{b^k}{a+c}+\frac{c^k}{a+b}\geq\frac{3}{2}\text{, за } a,b,c>,\ abc=1$$

едноставно се докажува со помош на неравенството на Мјурхед за $k\geq1$ или $k\leq-2$. Навистина, со смената $a=x^3, b=y^3, c=z^3$, хомогенизација и сведување на заеднички именител тоа се сведува на неравенството

$$T_{3k+6,0,0}+2T_{3k+3,3,0}+T_{3k,3,3}\geq3T_{k+5,k+2,k-1}+T_{k+2,k+2,k+2}\,.$$

3. Определи ги сите природни броеви $n>3$ за кои постојат n точки $A_1,A_2,\dots,A_n$ во рамнината и реални броеви $r_1,r_2,\dots,r_n$, такви што се исполнети условите:

а) било кои три точки од точките $A_1,A_2,\dots,A_n$ се неколинеарни,

b) за секои i, j, k $(1 \leq i < j < k \leq n)$ плоштината на триаголникот $A_i A_j A_k$ е еднаква на $r_i + r_j + r_k$.

Решение. Ќе докажеме дека $n = 4$ е единствениот природен број што ги задоволува условите на задачата.

Ако $n = 4$, нека $A_1 A_2 A_3 A_4$ е единечен квадрат и $r_i = \frac{1}{6}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Тогаш, условите на задачата се задоволени.

Ќе докажеме дека бројот 5 не ги задоволува условите на задачата, од каде ќе следува дека не постои природен број $n \geq 5$, кој ги задоволува условите на задачата.

Нека претпоставиме дека бројот 5 ги задоволува условите на задачата. Плоштината на триаголникот $A_i A_j A_k$ ја означуваме со $[ijk]$. Имаме,

$$[ijk] = r_i + r_j + r_k \text{, за } 1 \leq i < j < k \leq 5 .$$

Ако на пример $r_4 = r_5$, тогаш $[124] = [125]$ и $[234] = [235]$, од што следува дека $A_5 A_4$ е паралелна со $A_1 A_2$ и $A_2 A_3$, што не е можно бидејќи точките A_1, A_2, A_3 не се колинеарни. Да забележиме дека ако четириаголникот $A_i A_j A_k A_l$ е конвексен, тогаш важи $[ijk] + [kli] = [jkl] + [lij]$, од што следува $r_i + r_k = r_j + r_l$.

Да ја разгледаме конвексната обвивка на точките A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, т.е. конвексниот многуаголник чии темиња припаѓаат на множеството $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$. Можни се следните три случаи.

а) Конвексната обвивка е петаголник $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$. Бидејќи $A_1 A_2 A_3 A_4$ и $A_1 A_2 A_3 A_5$ се конвексни четориаголници, од претходните забелешки добиваме дека $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$ и $r_1 + r_3 = r_2 + r_5$. Од овде е $r_4 = r_5$, што е противречност.

б) Конвексната обвивка е четириаголник $A_1 A_2 A_3\ A_4$. Не се губи од општоста ако се претпостави дека A_5 се наоѓа во триаголникот $A_3 A_4 A_1$. Тогаш $A_1 A_2 A_3 A_5$ е конвексен четириаголник, и добиваме иста противречност како и во првиот случај.

в) Конвексната обвивка е триаголникот $A_1 A_2 A_3$. Бидејќи

$$[123] + [234] + [314] = [125] + [235] + [315]$$

добиваме $r_4 = r_5$ што е противречност.

4. Определи ја најголемата можна вредност на бројот x_0 за која постои низа позитивни реални броеви $x_0, x_1, \ldots, x_{1995}$ кои ги задоволуваат условите:

a) $x_0 = x_{1995}$.

b) $x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}$, за секој $i \in \{1, 2, ..., 1995\}$.

Решение. Дадениот услов е еквивалентен со

$$2x_i^2 - (x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}})x_i + 1 = 0,$$

чии решенија по x_i се $x_i = \frac{1}{2}x_{i-1}$ и $x_i = \frac{1}{x_{i-1}}$. Со математичка индукција ќе докажеме дека $x_i = 2^{k_i} x_0^{\varepsilon_i}$, каде k_i е цел број таков што $|k_i| \le i$ и $\varepsilon_i = (-1)^{k_i + i}$. Тврдењето е точно за $i = 0$, бидејќи земаме $k_0 = 0$ и $\varepsilon_0 = 1$. Да претпоставиме дека тврдењето е точно за $i-1$. Можни се два случаја. Ако $x_i = \frac{1}{2}x_{i-1}$, тогаш имаме $k_i = k_{i-1} - 1$ и $\varepsilon_i = \varepsilon_{i-1}$. Ако $x_i = \frac{1}{x_{i-1}}$, тогаш имаме $k_i = -k_{i-1}$ и $\varepsilon_i = -\varepsilon_{i-1}$. И во двата случаја непосредно се добива дека $|k_i| \le i$ и $\varepsilon_i = (-1)^{k_i+1}$. Затоа $x_{1995} = 2^k x_0^{\varepsilon}$ каде $k = k_{1995}$ и $\varepsilon = \varepsilon_{1995}$ при што $0 \le |k| \le 1995$ и $\varepsilon = (-1)^{1995+k}$. Значи $x_0 = x_{1995} = 2^k x_0^{\varepsilon}$. Ако k е непарен број, тогаш $\varepsilon = 1$, па имаме $2^k = 1$, што е противречност бидејќи $k \ne 0$. Затоа k мора да е парен број, па $\varepsilon = -1$ и $x_0^2 = 2^k$. Бидејќи k е парен и $|k| \le 1995$ добиваме дека $k \le 1994$. Од овде $x_0 \le 2^{997}$. Равенството се достигнува за $x_0 = 2^{997}$, $x_i = \frac{1}{2}x_{i-1}$ за $i = 1, 2, 3, ..., 1994$ и $x_{1995} = \frac{1}{x_{1994}}$. Тогаш, $x_{1994} = 2^{-997}$ и $x_{1995} = 2^{997} = x_0$.

5. Нека $ABCDEF$ е конвексен шестаголник, таков што

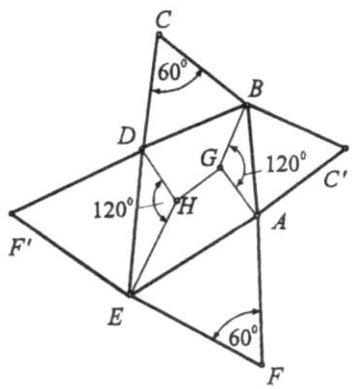
$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}, \quad \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FA} \quad \text{и} \quad \measuredangle BCD = \measuredangle EFA = 60^\circ,$$

и G и H се точки од внатрешноста на шестаголникот такви што

$$\measuredangle AGB = \measuredangle DHE = 120^\circ.$$

Докажи дека

$$\overline{AG} + \overline{GB} + \overline{GH} + \overline{DH} + \overline{HE} \ge \overline{CF}.$$



Решение. Забележуваме дека триаголниците BCD и EFA се рамнострани. Од

$$\overline{AB} = \overline{BD} \text{ и } \overline{AE} = \overline{ED}$$

следува дека правата BE е оска на симетрија за четириаголникот $ABDE$. Нека C' и F' се соодветно симетричните точки на C и F во однос на правата BE. Тогаш,

$$\triangle BCD \cong \triangle BC'A \text{ и } \triangle ADF' \cong \triangle EAF.$$

Четириаголникот $AGBC'$ е тетивен бидејќи

$$\measuredangle AGB + \measuredangle AC'B = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ .$$

Од теоремата на Птоломеј добиваме дека $\overline{AG} + \overline{GB} = \overline{GC'}$. Аналогно се добива дека $\overline{HE} + \overline{HD} = \overline{HF'}$. Од овде добиваме

$$\overline{CF} = \overline{C'F'} \le \overline{C'G} + \overline{GH} + \overline{HF'} = \overline{AG} + \overline{GB} + \overline{GH} + \overline{DH} + \overline{HE}.$$

Притоа равенството важи ако и само ако точките G и H лежат на правата $C'F'$.

6. Нека p е непарен прост број. Определи го бројот на сите подмножества A од множеството $\{1,2,3,...,2p\}$ такви што:

a) A има точно p елементи, и

b) збирот на сите елементи од множеството A е делив со p.

Решение. *Прв начин.* За произволно p-елементно подмножество A од $\{1,2,3,...,2p\}$, со $s(A)$ да го означиме збирот на елементите во A. Има вкупно $\binom{2p}{p}$ подмножества од $\{1,2,3,...,2p\}$ со по p елементи. За множествата $B=\{1,2,...,p\}$ и $C=\{p+1,p+2,...,2p\}$ важи $s(B)\equiv s(C)\equiv 0 (\text{mod } p)$. Останатите $\binom{2p}{p}-2$ подмножества со p елементи ќе ги поделиме во групи од по p броеви на следниот начин:

Две подмножества A и A' се во иста група ако и само ако $A\cap C = A'\cap C$ и ако $A'\cap B$ е циклична пермутација од $A\cap B$ во однос на B. Тоа значи, ако $A\cap B$ има n елементи, $0<n<p$, тогаш за некој m, таков што $0<m<p$ важи

$$A'\cap B = \{x+m \mid x\in A\cap B, x+m\le p\}\cup\{x+m-p \mid x\in A\cap B, x\le p<x+m\}.$$

Сега $s(A')-s(A)\equiv mn\,(\text{mod } p)$ и mn мора да биде делив со p. Но, mn не е деливо со p, бидејќи p е прост број. Затоа точно едно подмножество A во секоја група го задоволува условот $s(A)\equiv 0\,(\text{mod } p)$. Затоа бројот на сите такви подмножества е еднаков на $\frac{1}{p}(\binom{2p}{p}-2)+2$.

Втор начин. Нека $\omega_k = \cos\frac{2k\pi}{p} + i\sin\frac{2k\pi}{p}$, за некој $k, 1k \le p-1$. Ако го искористиме равенството

$$\prod_{i=1}^{2p}(x-\omega_k^i) = (x^p-1)^2 = x^{2p}-2x^p+1,$$

тогаш со споредување на коефициентите пре x^p добиваме

$$\sum_{\{i_1,...,i_p\}\subset A} \omega_k^{i_1+i_2+...+i_p} = \sum_{i=0}^{p-1} a_i\omega_k^i = 2,$$

каде a_i е бројот на подмножествата $\{i_1, i_2, ..., i_p\} \subset A$ за кои

$$i_1 + i_2 + ... + i_p \equiv i (\mathrm{mod}\, p) .$$

Го разгледуваме полиномот

$$q(x) = -2 + \sum_{i=0}^{p-1} a_i x^i \ .$$

Бидејќи $q(\omega_k) = 0$ за $k = 1, 2, ..., p-1$, добиваме дека $1 + x + ... + x^{p-1} \mid q(x)$, па затоа $q(x) = c(1 + x + ... + x^{p-1})$ за некоја константа c. Според тоа,

$$a_0 - 2 = a_1 = ... = a_{p-1} ,$$

па како

$$a_0 + a_1 + ... + a_{p-1} = \binom{2p}{p} ,$$

добиваме $a_0 = \frac{1}{p}(\binom{2p}{p} - 2) + 2$.