Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 1998/99 година

СТЈУАРТОВА ТЕОРЕМА

Ратко Тошић, Нови Сад

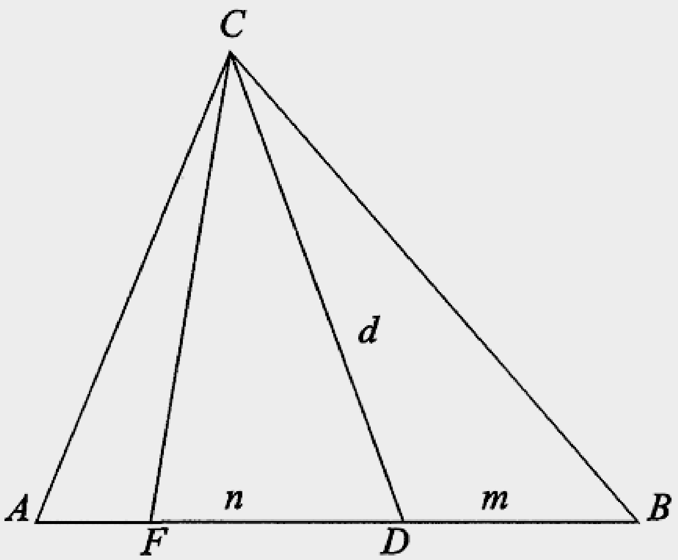
Стјуартова теорема нам омогућава да дужине висина, тежишних линија и симетрала углова троугла изразимо преко дужина његових страница.

Теорема је добила име по шкотском математичару Метју Стјуарту, који је први објавио њен доказ, 1746. године.

Теорема Стјуарта. Нека је D тачка на страници AB троугла ABC, $d = CD$, $m = BD$, $n = AD$. Тада је

$$d^2 = \frac{n}{c}a^2 + \frac{m}{c}b^2 - mn.$$

Доказ. У доказу ћемо користити Питагорину теорему.



Спустимо из C нормалу CF на AB. Нека је $\angle BDC \geq \angle ADC$. Тада је

$$\begin{aligned} a^2 &= CF^2 + (m + DF)^2 \\ &= CF^2 + m^2 + DF^2 + 2m \cdot DF \\ &= (CF^2 + DF^2) + m^2 + 2m \cdot DF, \end{aligned}$$

тј.

$$a^2 = d^2 + m^2 + 2m \cdot DF. \tag{1}$$

Потпуно аналогно добијамо

$$b^2 = d^2 + n^2 - 2n \cdot DF. \tag{2}$$

Узимајући у обзир да је $m+n=c$, после множења (1) са n, (2) са m, и сабирања добијених једнакости, добијамо

$$a^2n+b^2m=mnc+d^2c, \tag{3}$$

одакле следи тврђење. □

Задатак 1. Из теореме Стјуарта извести формуле за дужине симетрала углова троугла.

Решење. Нека је $l_c=d$ дужина симетрале угла C. Тада имамо три једначине: једначину (3) из доказа теореме и једначине

$$m+n=c; \quad \frac{m}{a}=\frac{n}{b}.$$

Из последње две једначине налазимо да је

$$m=\frac{ac}{a+b}, \ \ n=\frac{bc}{a+b}.$$

Заменом тих вредности у (3), добијамо

$$l_c^2=ab\frac{(a+b)^2-c^2}{(a+b)^2},$$

тј.

$$l_c=\sqrt{ab\frac{(a+b)^2-c^2}{(a+b)^2}}.$$

Аналогно се добијају изрази за друге две симетрале углова.

Задатак 2. Доказати да је троугао једнакокрак ако су му две симетрале углова једнаке.

Решење. Нека је $l_c=l_b$. Тада је

$$ab\frac{(a+b)^2-c^2}{(a+b)^2}=ac\frac{(a+c)^2-b^2}{(a+c)^2},$$

или

$$b\Big(1-\frac{c^2}{(a+b)^2}\Big)=c\Big(1-\frac{b^2}{(a+c)^2}\Big),$$

тј.

$$b-c+bc\frac{b(a+b)^2-c(a+c)^2}{(a+c)^2(a+b)^2}=0.$$

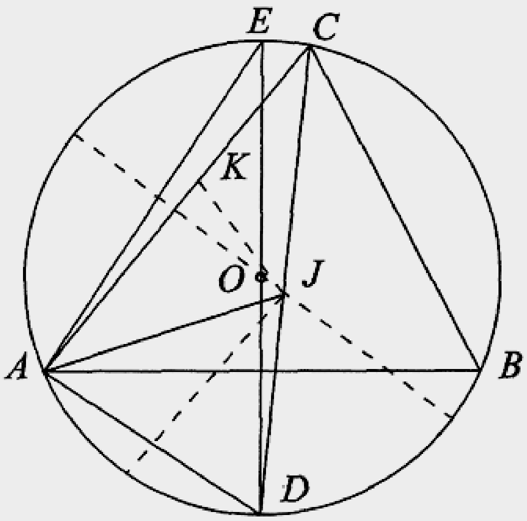
Ако је $b>c$ ($b<c$), лева страна последње једнакости је позитивна (негативна). Како, међутим, лева страна мора бити једнака нули, то је $b=c$.

Задатак 3. *(Ојлерова формула)* Доказати да се растојање d између центара уписане и описане кружнице троугла изражава формулом

$$d^2=R^2-2Rr,$$

где је R полупречник описане, а r полупречник уписане кружнице троугла.

Решење. Нека је O центар описане а J центар уписане кружнице троугла ABC. Означимо са D тачку пресека симетрале угла C троугла са описаном кружницом, а са K подножје нормале из J на AC (тачку додира уписане кружнице).



Троугао ADJ је једнакокрак, јер су му углови код темена A и J једнаки (сваки је једнак полузбиру углова код темена A и C троугла ABC). Зато је $AD = DJ$.

Примењујући теорему Стјуарта на троугао COD, добијамо:

$$d^2 = \frac{CJ}{CD} \cdot R^2 + \frac{DJ}{CD} \cdot R^2 - CJ \cdot DJ = R^2 - CJ \cdot DJ.$$

Из троуглова CJK и ACD редом налазимо:

$$CJ = \frac{r}{\sin \frac{C}{2}}, \quad AD = 2R \sin \frac{C}{2}.$$

Према томе,

$$CJ \cdot DJ = CJ \cdot AD = 2Rr,$$

одакле је

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

Задатак 4. Из теореме Стјуарта извести формуле за дужине тежишних линија троугла. На основу тога доказати да је збир квадрата две странице датог троугла ABC једнак двоструком збиру квадрата половине треће странице и квадрата тежишне линије одговарајуће тој страници.

Задатак 5. У дати троугао ABC са страницама a, b, c уписана је кружница. Израчунати дужину дужи која спаја теме C и тачку C_1 у којој уписана кружница додирује страницу AB.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

Задатак 4. Применом теореме Стјуарта добијамо да за тежишну линију m_c из темена C важи:

$$m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

На основу тога је

$$a^2 + b^2 = 2\left(m_c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2\right).$$

Потпуно аналогно добијају се изрази за друге две тежишне линије.

Задатак 5. $CC_1^2 = \frac{1}{c^2}(a^2(p-a) + b^2(p-b) + c^2(p-c) - c(p-a)(p-b))$, где је $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.