Сојузен натпревар 1965

III година

1. Реши ја равенката

$$x^3-(m^2+3)x^2+(m^2+3)x+m^4-1=0$$

по непозната x раставувајќи го на множители полиномот $P(m)$ на левата страна на оваа равенка.

Решение. Имаме

$$P(m)=m^4-(x^2-x)m^2+(x-1)^2=(m^2-x+1)(m^2-(x-1)^2)\ .$$

Решенијата на дадената равенка се:

$$x_1=m^2+1,\quad x_2=m+1,\quad x_3=-m+1\,.$$

2. Определи ги рабовите на квадарот, ако е познат нивниот збир s и неговата дијагонала d , а едниот раб е геометриска средина на другите два раба.

Решение. Нека a,b,c се рабовите на квадарот и нека $c=\sqrt{ab}$. Според условот на задачата

$$a+b+\sqrt{ab}=s,\ \ a^2+b^2+ab=d^2\,,$$

од каде добиваме

$$(s-\sqrt{ab})^2=d^2+ab \text{ и } \sqrt{ab}=\tfrac{s^2-d^2}{2s}\,,$$

при што мора да важи $s>d$. Понатаму, лесно се добива

$$ab=(\tfrac{s^2-d^2}{2s})^2,\quad a+b=\tfrac{s^2+d^2}{2s}\,.$$

Значи, a и b се решенија на квадратната равенка

$$t^2-\tfrac{s^2+d^2}{2s}t+(\tfrac{s^2-d^2}{2s})^2=0\,,$$

по непозната t . Оваа равенка има решенија ако и само ако

$$(\tfrac{s^2+d^2}{2s})^2-4(\tfrac{s^2-d^2}{2s})^2\geq 0\,,$$

т.е. ако и само ако $3d^2\geq s^2$. Конечно, при условот $d<s\leq d\sqrt{3}$ ги добиваме бараните броеви

$$\tfrac{s^2+d^2+\sqrt{(3d^2-s^2)(3s^2-d^2)}}{4s},\ \tfrac{s^2+d^2-\sqrt{(3d^2-s^2)(3s^2-d^2)}}{4s},\ \tfrac{s^2-d^2}{2s}\,.$$

3. Определи ги сите реални решенија $x\ (0<x<2\pi)$ на неравенката

$$\tfrac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x}>1\,.$$

Решение. Имаме:

$$\tfrac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x}=\tfrac{\sin 3x(1+2\cos x)}{\cos 3x(1+2\cos x)}\,.$$

Според тоа, треба да ги определиме сите реални броеви x за кои важи

$$\operatorname{tg} 3x > 1, \cos x \neq \tfrac{1}{2}, 0 < x < 2\pi .$$

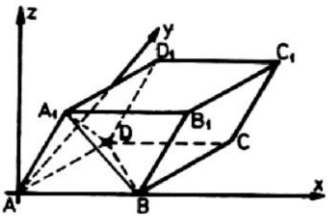
Множеството од сите такви броеви е еднакво на

$$\bigcup_{k=0}^{5} \left(\frac{(4k+1)\pi}{12}, \frac{(4k+2)\pi}{12}\right).$$

4. Во паралелопипед чии ѕидови се складни ромбови со агол од 60° дадена е најголемата дијагонала d . Определи ги дијагоналите на ова тело.

Решение. Нека $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е дадениот паралелопипед и нека

$$\measuredangle BAD = \measuredangle DAA_1 = \measuredangle A_1AB = 60^\circ .$$



Воведуваме правоаголен координатен систем таков што важи:

1) координатниот почеток O се совпаѓа со точката A ,
2) точката B припаѓа на позитивниот дел на $x-$оската,
3) точката D припаѓа на xOy рамнината и има позитивна $y-$координата,
4) точката A_1 има позитивна $z-$координата (цртеж десно).

Нека $a = AB$. Тогаш ABD е рамностран триаголник со висина $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, а $ABDA_1$ е правилен тетраедар со висина $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Сега лесно се добива дека координатите на сите темиња на паралелопипедот се:

$$A(0,0,0),\ B(a,0,0),\ C(\tfrac{3a}{2},\tfrac{a\sqrt{3}}{2},0),\ D(\tfrac{a}{2},\tfrac{a\sqrt{3}}{2},0),$$

$$A_1(\tfrac{a}{2},\tfrac{a\sqrt{3}}{6},\tfrac{a\sqrt{6}}{3}),\qquad B_1(\tfrac{3a}{2},\tfrac{a\sqrt{3}}{6},\tfrac{a\sqrt{6}}{3}),$$

$$C_1(2a,\tfrac{2a\sqrt{3}}{3},\tfrac{a\sqrt{6}}{3}),\quad D_1(a,\tfrac{2a\sqrt{3}}{3},\tfrac{a\sqrt{6}}{3}).$$

Понтаму,

$$d^2 = AC_1^2 = (2a)^2 + (\tfrac{2a\sqrt{3}}{3})^2 + (\tfrac{a\sqrt{6}}{3})^2 = 6a^2 ,$$

од каде добиваме $a = \frac{d}{\sqrt{6}}$. Понатаму, лесно се добива дека должините на дијагоналите на паралелопипедот се

$$BD_1 = DB_1 = CA_1 = \frac{d}{\sqrt{6}}$$

IV година

1. Определи го збирот на сите броеви во табелата

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 2 & 3 & \ldots & k \\
2 & 3 & 4 & \ldots & k+1 \\
3 & 4 & 5 & \ldots & k+2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
k & k+1 & k+2 & \ldots & 2k-1
\end{array}$$

Решение. Бараниот збир е еднаков на:

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=j}^{j+k-1} i=\sum_{j=1}^{k}\frac{k}{2}(2j+k-1)=\frac{k^2(k-1)}{2}+k\sum_{j=1}^{k} j=\frac{k^2(k-1)}{2}+k\,\frac{k(k+1)}{2}=k^3 .$$

2. Дадена е функцијата $y=x^3+px+q$.

а) Ако M е локален максимум, а m е локален минимум на дадената функција, докажи дека

$$Mm=q^2+\frac{4}{27}p^3 .$$

б) Определи ги p и q , така што $M-m=4$ и -2 е нула на функцијата. Испитај го текот на добиената функција.

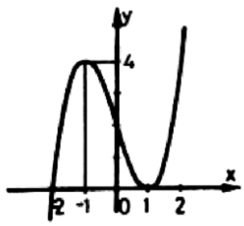
Решение. а) Бидејќи $y'=3x^2+p$, лесно се добива дека дадената функција има локални екстреми во точките $x_1=-\sqrt{-\frac{p}{3}},\ x_2=\sqrt{-\frac{p}{3}}$, ако $p<0$. Затоа

$$Mm=y(x_1)y(x_2)=(\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}-p\sqrt{-\frac{p}{3}}+q)(-\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}+p\sqrt{-\frac{p}{3}}+q)$$
$$=(q-\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}})(q+\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}})=q^2+\frac{4}{27}p^3.$$

б) Системот равенки

$$M-m=-\frac{4p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}=4,$$
$$(-2)^3-2p+q=0,$$

има точно едно решение: $p=-, q=2$.



Графикот на функцијата $y=x^3-3x+2$ е прикажан на цртежот десно.

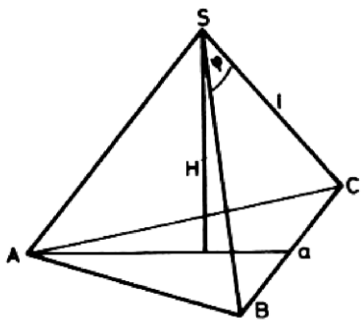
3. Даден е конвексен петаголник $A_1A_2A_3A_4A_5$ и точки B_1,B_2,B_3,B_4,B_5, такви што секоја страна на петаголникот содржи точно една од овие точки. Конструирани се сите прави определени со темињата на петаголниот и точките B_1,B_2,B_3,B_4, B_5 . Ако се знае дека (не сметајќи ги точките A_i и B_j) никои три од овие прави не се сечат во една точка и никои две не се паралелни, определи го бројот на сите точки во кои се сечат по две од овие прави.

Решение. Конструирани се вкупно 35 прави (10 определени со точките A_i, десет определени со точките B_i и уште 15 прави кои ги поврзуваат точките B_i со темињата на петаголникот). Секоја од точките A_i содржи точно 7 од овие прави, а секоја од точките B_i содржи точно 8 од овие прави. Бројот на точките во кои се сечат точно две од конструираните прави е еднаков на

$$\binom{35}{2}-4[\binom{7}{2}-1]-5[\binom{8}{2}-1]=360 .$$

4. На рабовите на триедарот со врв S, кај кој сите агли меѓу рабовите се еднакви, дадени се отсечки $SA=SB=SC=l$. Определи го аголот меѓу рабовите така што волуменот на тераедарот $SABC$ ќе биде најголем.

Решение. Нека сите агли на дадениот триедар се еднакви на φ (при што $0<\varphi<\frac{2\pi}{3}$) и нека $a=AB$ и h се соодветно основниот раб и висината повлечена од темето S на тетраедарот $SABC$ (цртеж десно). Тогаш



$$a^2=l^2+l^2-2l^2\cos\varphi=4l^2\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

$$a=2l\sin\frac{\varphi}{2},$$

$$H^2=l^2-(\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}2l\sin\frac{\varphi}{2})^2,$$

$$H=l\sqrt{1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Волуменот на тетраедарот е

$$V(\varphi)=\frac{H}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{3}l^3\sin^2\frac{\varphi}{2}\sqrt{3-4\sin^2\frac{\varphi}{2}} .$$

Изводот на функцијата $f(t)=t\sqrt{3-4t},\, 0<t<\frac{3}{4}(=\sin^2\frac{\pi}{3})$ е

$$f'(t)=\frac{3-6t}{\sqrt{3-4t}}\begin{cases}>0, & \text{ако е } 0<t<\frac{1}{2},\\ =0, & \text{ако е } t=\frac{1}{2},\\ <0, & \text{ако е } \frac{1}{2}<t<\frac{3}{4}.\end{cases}$$

Според тоа, функцијата f го достигнува максимумот за $t=\frac{1}{2}$, па функцијата $V(\varphi)$, $0<\varphi<\frac{2\pi}{3}$, достигнува максимум за $\sin^2\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{2}$, т.е. за $\varphi=\frac{\pi}{4}$.